

~~RA~~
RA

**stichting
mathematisch
centrum**

**Σ
MC**

REKENAFDELING

CR 16/70 JUNI

CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENEN B

PROF. DR. R. TIMMAN
PARTIELE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN, DEEL Ia

~~RA~~
RA

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

PARTIËLE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

door

Prof.dr.R.Timman

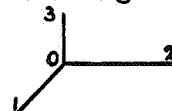
cursus 1963

Inleiding

In dit college wordt een overzicht gegeven van de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen. Een partiële differentiaalvergelijking is een relatie tussen partiële differentiaalquotiënten van een functie van twee of meer variabelen.

1. Vectoren

In de driedimensionale ruimte kiezen we een rechthoekig rechtsdraaiend assenstelsel met 0 als oorsprong. De coördinaten of kentallen van een punt P geven we aan met (x,y,z) of (x_1, x_2, x_3) .



Onder de vector $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ verstaan we het gerichte lijnstuk van 0 naar P.

De lengte der vector $\underline{x}$ geven we aan met $|\underline{x}|$, dus

$$|\underline{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Maakt $\underline{x}$ met de drie assen opvolgend de hoeken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan is

$$x_i = |\underline{x}| \cos \alpha_i \quad (1.2)$$

en

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1. \quad (1.3)$$

De vectoren ter lengte 1 langs de drie assen heten de drie eenheidsvectoren. Ze worden opvolgend aangeduid met $\underline{i}$, $\underline{j}$ en $\underline{k}$.

De nulvector $\underline{0}$ is de vector met lengte 0.

De somvector $\underline{x+y}$ van twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is de diagonaalvector van het parallelogram, opgespannen door $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

Het product $\lambda \underline{x}$ van een vector $\underline{x}$ met een getal λ is de vector met lengte $|\lambda| |\underline{x}|$, waarvan de richting gelijk of tegengesteld is aan die van $\underline{x}$ naargelang $\lambda > 0$ of $\lambda < 0$.

In plaats van $\underline{x} + (-1)\underline{y}$ schrijven we $\underline{x-y}$.

Men bewijze de volgende eigenschappen:

- a. Als $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, dan is
 $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.
- b. Als $\underline{x} = (x, y, z)$ en λ een getal, dan is
 $\lambda \underline{x} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
- c. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- d. $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda \underline{x} + \lambda \underline{y}$
- e. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$
- f. Als $\underline{x} = (x, y, z)$, dan $\underline{x} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$. (1.4)

Onder het inwendig product $\underline{x} \cdot \underline{y}$ van twee vectoren

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ en } \underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

verstaan we het getal

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (1.5)$$

Men bewijze:

$$a. \quad (\lambda \underline{x} + \mu \underline{y}) \cdot \underline{z} = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{z}) + \mu(\underline{y} \cdot \underline{z}) \quad (1.6)$$

$$b. \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$$

$$c. \quad |\underline{x}| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

Is θ de hoek tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$, dan is

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = |\underline{x}| |\underline{y}| \cos \theta. \quad (1.8)$$

Bewijs: $|\underline{y}| \cos \theta$ is de gerichte projectie van $\underline{y}$ op $\underline{x}$; dit is gelijk aan de som van de projecties van $y_1 \underline{i}$, $y_2 \underline{j}$ en $y_3 \underline{k}$ op $\underline{x}$.

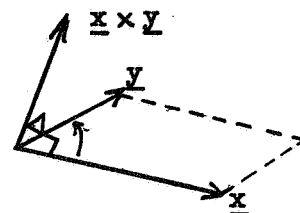
Als $\underline{x}$ hoeken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ met $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ maakt, zijn deze projecties gelijk aan $y_1 \cos \alpha_1, y_2 \cos \alpha_2, y_3 \cos \alpha_3$.

$$\text{Dus } |\underline{x}| |\underline{y}| \cos \theta = |\underline{x}| (y_1 \cos \alpha_1 + y_2 \cos \alpha_2 + y_3 \cos \alpha_3) \\ = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad (\text{zie 1.2})$$

Voor twee vectoren $\underline{x} \neq \underline{0}$ en $\underline{y} \neq \underline{0}$ geldt dus:
als $\underline{x}$ loodrecht $\underline{y}$, dan $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$ en omgekeerd.

Tenslotte is $\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$
 en $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0$.

Onder het vectorproduct of uitwendig product $\underline{x} \times \underline{y}$ van twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ verstaan we de vector waarvan de lengte gelijk is aan de oppervlakte van het door $\underline{x}$ en $\underline{y}$ opgespannen parallelogram, en waarvan de richting loodrecht is op het vlak door $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zodanig dat ze past bij een rechtsdraaiing van $\underline{x}$ naar $\underline{y}$ over de kleinste hoek.



Is θ de kleinste hoek tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$, dan is dus

$$|\underline{x} \times \underline{y}| = |\underline{x}| |\underline{y}| \sin \theta. \quad (1.9)$$

Het vectorproduct is een representant van het door $\underline{x}$ en $\underline{y}$ opgespannen parallelogram.

Men bewijze:

a. $\underline{y} \times \underline{x} = -(\underline{x} \times \underline{y})$

b. $(\lambda \underline{y}) \times \underline{x} = \lambda(\underline{y} \times \underline{x}) \quad (1.10)$

Opm: onderscheid $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.

c. $\underline{x} \times (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} \times \underline{y}) + (\underline{x} \times \underline{z}) \quad (1.11)$

Opm: is α het vlak $\perp \underline{x}$ en $\underline{y}'$ de projectie van $\underline{y}$ op α , dan is $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{x} \times \underline{y}'$.

Analoog voor $\underline{z}$ en $\underline{y} + \underline{z}$.

Gemakkelijk bewijst men: $\underline{x} \times (\underline{y}' + \underline{z}') = (\underline{x} \times \underline{y}') + (\underline{x} \times \underline{z}')$.

d. $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}; \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}; \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}; \quad (1.12)$

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0$.

e. $\underline{x} \times \underline{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \underline{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \underline{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \underline{k}$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

(zie 1.4, 10, 11)

- f. Bij een draaiing D van het assenstelsel (orthogonale afbeelding met determinant $+1$) geldt:

$$\begin{aligned}(\underline{Dx}) \cdot (\underline{Dy}) &= \underline{x} \cdot \underline{y} \\ (\underline{Dx}) \times (\underline{Dy}) &= D(\underline{x} \times \underline{y}).\end{aligned}$$

- g. Bij een spiegeling S van het assenstelsel (orthogonale afbeelding met determinant -1) geldt:

$$\begin{aligned}(\underline{Sx}) \cdot (\underline{Sy}) &= \underline{x} \cdot \underline{y} \\ (\underline{Sx}) \times (\underline{Sy}) &= -S(\underline{x} \times \underline{y}).\end{aligned}$$

We vormen producten van drie vectoren.

Producten als $(\underline{x} \cdot \underline{y}) \cdot \underline{z}$ of $(\underline{x} \cdot \underline{y}) \times \underline{z}$ hebben geen betekenis.

$(\underline{x} \cdot \underline{y}) \underline{z}$ is de vector $\lambda \underline{z}$ met $\lambda = \underline{x} \cdot \underline{y}$.

Het getal $(\underline{x} \times \underline{y}) \cdot \underline{z}$, het scalaire tripelproduct van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$, is gelijk aan de inhoud van het door $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ opgespannen parallellepipedum, vermenigvuldigd met $+1$ of -1 naargelang de hoek tussen $\underline{x} \times \underline{y}$ en $\underline{z}$ scherp of stomp is.

Bewijs: $|(\underline{x} \times \underline{y}) \cdot \underline{z}|$ is gelijk aan het product van de oppervlakte van het door $\underline{x}$ en $\underline{y}$ opgespannen parallellogram en de projectie van $\underline{z}$ op de loodlijn op dit parallellogram.

Men bewijze:

$$\begin{aligned}a. \quad (\underline{x} \times \underline{y}) \cdot \underline{z} &= (\underline{y} \times \underline{z}) \cdot \underline{x} = (\underline{z} \times \underline{x}) \cdot \underline{y} = \\ &= -(\underline{y} \times \underline{x}) \cdot \underline{z} = -(\underline{z} \times \underline{y}) \cdot \underline{x} = -(\underline{x} \times \underline{z}) \cdot \underline{y}\end{aligned} \quad (1.14)$$

$$b. \quad (\underline{x} \times \underline{y}) \cdot \underline{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

De vector $(\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z}$, het vectortripelproduct van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$, is loodrecht $\underline{x} \times \underline{y}$ dus gelegen in het vlak door $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zodat

$$(\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z} = \lambda \underline{x} + \mu \underline{y}.$$

Inwendige vermenigvuldiging met $\underline{z}$ levert

$$0 = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{z}) + \mu(\underline{y} \cdot \underline{z})$$

zodat we kunnen schrijven

$$\begin{aligned}\lambda &= \rho(\underline{y} \cdot \underline{z}) \\ \mu &= -\rho(\underline{x} \cdot \underline{z})\end{aligned}$$

waarbij ρ en scalair is.

Uit

$$(\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z} = \rho \{ (\underline{y} \cdot \underline{z}) \underline{x} - (\underline{x} \cdot \underline{z}) \underline{y} \}$$

blijkt dat ρ van de graad nul dus door een speciale keuze van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ te bepalen is.

De substitutie $\underline{x} = \underline{z} = \underline{i}$ en $\underline{y} = \underline{j}$ geeft $\rho = -1$.

Resultaat:

$$(\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z} = (\underline{x} \cdot \underline{z}) \underline{y} - (\underline{y} \cdot \underline{z}) \underline{x} \quad (1.16)$$

Opgaven en toepassingen:

a. Bewijs (1.16) door uitschrijving in kentallen.

b. Bewijs:
$$(\underline{x} \times \underline{y}) \cdot (\underline{z} \times \underline{u}) = (\underline{x} \cdot \underline{z})(\underline{y} \cdot \underline{u}) - (\underline{x} \cdot \underline{u})(\underline{y} \cdot \underline{z}) \quad (1.17)$$

Hieruit volgt speciaal:

$$|\underline{x} \times \underline{y}|^2 = |\underline{x}|^2 |\underline{y}|^2 - (\underline{x} \cdot \underline{y})^2 \quad (1.18)$$

c. Bewijs (1.18) meetkundig.

d. De parametervoorstelling van de loodlijn door $\underline{p}$ op het vlak door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is:

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda(\underline{a} \times \underline{b}).$$

e. De vergelijking van het vlak door $\underline{p}$ met $\underline{a}$ en $\underline{b}$ als richtingsvectoren luidt:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{x} - \underline{p}) = 0.$$

De vergelijking van het vlak door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ luidt:

$$\{(\underline{a} - \underline{c}) \times (\underline{b} - \underline{c})\} \cdot (\underline{x} - \underline{c}) = 0.$$

f. De projectie van $\underline{x}$ op de lijn $\underline{p} + \lambda \underline{a}$ is gelijk aan $\frac{1}{|\underline{a}|} (\underline{x} \cdot \underline{a})$.

g. De lijn die de kruisende lijnen ℓ : $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \underline{a}$ en m : $\underline{x} = \underline{q} + \mu \underline{b}$ loodrecht snijdt, heeft de vector $\underline{a} \times \underline{b}$ als richtingsvector. Zijn λ_1 en μ_1 de bij de snijpunten behorende parameterwaarden, dan is er dus een getal v zodat $(\underline{p} + \lambda_1 \underline{a}) - (\underline{q} + \mu_1 \underline{b}) = v(\underline{a} \times \underline{b})$.

Inwendige vermenigvuldiging met $\underline{a} \times \underline{b}$, $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b}$, $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ onder gebruikmaking van (1.14) geeft opvolgend:

$$v(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{p} - \underline{q}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

$$\lambda_1 (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = - \{ (\underline{p} - \underline{q}) \times \underline{b} \} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

$$\mu_1 (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = - \{ (\underline{p} - \underline{q}) \times \underline{a} \} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

Voor de afstand tussen ℓ en m vinden we:

$$d = \frac{|(\underline{p} - \underline{q}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b})|}{|\underline{a} \times \underline{b}|}$$

2. Ruimtekrommen

Een ruimtekromme wordt beschreven door een vector, waarvan de coördinaten functies zijn van één parameter:

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

De coördinaten worden voldoende vaak differentieerbaar verondersteld. Onder de afgeleide van $\underline{r}(t)$ verstaan we de vector

$$\dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.1)$$

(Denken we ons t als de tijd, dan is $\dot{\underline{r}}(t)$ de snelheidsvector). $\dot{\underline{r}}(t)$ heeft de richting van de raaklijn in $\underline{r}(t)$ aan de kromme.

Opgave: als $\underline{x} = \underline{x}(t)$ en $\underline{y} = \underline{y}(t)$, dan is

$$\frac{d}{dt} (\underline{x} \cdot \underline{y}) = \frac{d\underline{x}}{dt} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \frac{d\underline{y}}{dt} \quad (2.2)$$

De lengte van de kromme $\underline{r}(t)$ tussen de punten $\underline{r}(t_0)$ en $\underline{r}(t_1)$ is gelijk aan:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \dot{\underline{r}}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t) \}^{\frac{1}{2}} dt.$$

Is $t = t_1$ variabel dan wordt de lengte een functie van t :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \{ \dot{\underline{r}}(\tau) \cdot \dot{\underline{r}}(\tau) \}^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (2.3)$$

dus $s(t_0) = 0$

en

$$\frac{ds}{dt} = \{\dot{\underline{r}}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

$s(t)$ is de booglengte tussen de parameterwaarden t_0 en t .

Een rectificeerbare kromme is een kromme waarvoor de integraal bestaat.

In plaats van t nemen we nu als parameter de booglengteparameter s .

Voor de kromme $\underline{r}(s)$ geldt dan

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = \left(\frac{dx/dt}{ds/dt}, \frac{dy/dt}{ds/dt}, \frac{dz/dt}{ds/dt} \right)$$

zodat

$$\left| \frac{d\underline{r}}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} \cdot \{\dot{\underline{r}}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\}^{\frac{1}{2}} = 1.$$

De raakvector $\underline{t} = \frac{d\underline{r}}{ds}$ is dus een eenheidsvector.

De raakvector $\underline{t}(s) = \frac{d\underline{r}}{ds}$ is dus een eenheidsvector (2.5)

$\underline{t}(s)$ verandert dus alleen van richting. (s is op te vatten als de tijd, indien het punt de kromme eenparig doorloopt.)

Uit $\underline{t} \cdot \underline{t} = 1$ volgt door differentiëren naar s (zie 2.2)

$$2(\underline{t} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds}) = 0 \text{ dus } \frac{d\underline{t}}{ds} \text{ loodrecht } \underline{t}. \quad (2.6)$$

De vector $\frac{d\underline{t}}{ds}$, ook afhankelijk van s , is niet noodzakelijk een eenheidsvector.

Stel $\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \underline{n}$ met $|\underline{n}| = 1$. (2.7)

Definitie: $|\frac{d\underline{t}}{ds}| = \frac{1}{\rho}$ is de kromming van de kromme in het punt $\underline{r}(s)$;
 ρ is de kromtestraal.

In elk punt $\underline{r}(s)$ van de kromme liggen de normalen op de raakvector $\underline{t}(s)$ in één vlak: het normaalvlak.

De speciale normaal $\underline{n} = \rho \frac{d\underline{t}}{ds}$ heet hoofdnormaal.

Voorbeeld

Beschouw de ruimtekromme

$$\underline{r}(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$$

met φ als parameter en r constant.

De kromme is een cirkel in het x-y-vlak,

$$|\underline{r}(\varphi)| = r.$$

De booglengte, gerekend vanaf de x-as, is dus gelijk aan $r\varphi$.
 Dit volgt ook door berekening, want

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\dot{\underline{r}}(\varphi) \cdot \dot{\underline{r}}(\varphi)} = r$$

en we stelden $s(\varphi=0) = 0$.

Met de booglengte als parameter is:

$$\underline{r}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0)$$

$$\underline{t}(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0)$$

dus inderdaad $|\underline{t}(s)| = 1$.

$$\frac{d\underline{t}}{ds} = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, 0\right),$$

zodat (zie 2.7)

$$\underline{n} = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}, 0\right) \text{ en } \rho = r.$$

De boven gegeven definitie van kromtestraal is dus in overeenstemming met het begrip kromtestraal van een cirkel.

De twee vectoren $\underline{t}(s)$ en $\underline{n}(s)$ vragen om invoering van een derde: de binormaal $\underline{b}(s) = \underline{t} \times \underline{n}$. De drie eenheidsvectoren $\underline{t}$, $\underline{n}$ en $\underline{b}$ vormen het zogenaamde triëder van Serret-Frenet. Als het punt de kromme doorloopt, verandert dit triëder. In het laatste voorbeeld is $\underline{b}(s) = (0,0,1)$.

Opgave a) Bepaal booglengte en het triëder van Serret-Frenet voor een punt van de schroeflijn $\underline{r}(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, a\varphi)$.

b) Bewijs dat $\frac{d\underline{b}}{ds}$ een veelvoud is van $\underline{n}$.

Opmerking 1

Een ruimtekromme is een vectorfunctie van één variabele (parameter). Andere, nog ter sprake komende, functies zijn scalair functies en vectorfuncties, gedefinieerd op de ruimte: aan ieder punt $\underline{r} = (x,y,z)$ wordt een getal $\varphi(\underline{r}) = \varphi(x,y,z)$ respectievelijk een vector $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{a}(x,y,z) = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$ toegevoegd.

Men denke bij een scalairveld $\varphi(\underline{r})$ bij voorbeeld aan de temperatuur (of potentiaal, of massadichtheid) in elk punt $\underline{r}$. Bij een vectorveld $\underline{a}(\underline{r})$ kan men denken aan de snelheidsvector die in elk punt $\underline{r}$ de grootte en richting geeft van de snelheid die een deeltje in dat punt heeft; of aan de elektrische veldsterkte die in elk punt $\underline{r}$ de grootte en richting geeft van de kracht die op een in $\underline{r}$ geplaatste eenheid van positieve lading werkt.

Is de temperatuur of de elektrische veldsterkte in elk punt afhankelijk van de tijd t , dan krijgen we te maken met functies $\varphi(x,y,z,t)$ respectievelijk $\underline{a}(x,y,z,t)$.

Opmerking 2

Behalve de ons bekende integralen

$$\int_G f(x) dx, \iint_G f(x,y) dx dy \text{ en } \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz,$$

waarin G opvolgend een 1-, 2-, 3-dimensionaal gebied voorstelt, zijn voor ons van belang de lijnintegraal en oppervlakteintegraal.

Zij K een ruimtekromme, gegeven door $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, en $\varphi(x, y, z)$ een op K gedefinieerde functie.

Verdeel K in stukjes met lengte Δs , kies in elk stukje een punt (ξ, η, ζ) , dan is

$$\int_K \varphi ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \varphi(\xi, \eta, \zeta) \Delta s \quad (2.8)$$

de lijnintegraal van φ over K .

Een - hier niet bewezen - stelling leert:

$$\int_K \varphi ds = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right| dt \quad (2.9)$$

Is $\varphi(x, y, z) = 1$, dan is $\int_K \varphi ds = \int_K ds$ de lengte van K (zie 2.3).

Zij S een oppervlak in de ruimte, gegeven door de parametervoorstelling $\underline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, (u, v) in een gebied G van het u - v -vlak. Verdeel S in stukjes met oppervlakte $\Delta \sigma$, kies in elk stukje een punt (ξ, η, ζ) , dan is

$$\iint_S \varphi d\sigma = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \sum \varphi(\xi, \eta, \zeta) \Delta \sigma \quad (2.10)$$

de oppervlakteintegraal van φ over S .

Een - hier niet bewezen - stelling leert:

$$\iint_S \varphi d\sigma = \iint_G \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| du dv \quad (2.11)$$

waarin

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Voorbeeld

Een bol S met straal r om O wordt gegeven door

$$\underline{r} = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \theta)$$

Men vindt: $\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \right| = r |\sin \theta|$, zodat de oppervlakte der bol gelijk is aan ($\varphi(x,y,z) = 1$):

$$\iint_S d\sigma = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r |\sin \theta| d\varphi d\theta = 4\pi r^2.$$

Uiteraard zijn beide begrippen en stellingen hiermee niet exact behandeld.

3. De gradientvector van een scalaire functie

Zij $\varphi(x,y,z)$ een functie, gedefinieerd in elk punt van de ruimte, voldoende vaak partiëel differentieerbaar.

Zij $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ een vast punt en $\underline{n} = (\ell, m, n)$ een eenheidsvector.

De afgeleide van φ in $\underline{r}_0$ in de richting van de x -as is

$$\left(\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x} \right)_{\underline{r}_0} = \left(\frac{d\varphi(x,y_0,z_0)}{dx} \right)_{x_0}$$

Analoog $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Teneinde te kunnen spreken over de afgeleide van φ in $\underline{r}_0$ in de richting $\underline{n}$, bepalen we φ op de lijn door $\underline{r}_0$ met richting $\underline{n}$. Deze lijn heeft de parametervoorstelling $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{n}s$ ($|\underline{n}| = 1$, dus s is de booglengte), zodat op deze lijn $\varphi(x,y,z) = \varphi(x_0 + \ell s, y_0 + ms, z_0 + ns)$ een functie van één variabele is, namelijk van de parameter s .

We noemen nu $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=0}$ de richtingsafgeleide van φ in $\underline{r}_0$ in de richting $\underline{n}$, en schrijven voor deze grootte $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}\right)_{\underline{r}_0}$.

Dus (definitie)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}\right)_{\underline{r}_0} = \left(\frac{d\varphi(\underline{r}_0 + \underline{n}s)}{ds}\right)_{s=0} \quad (3.1)$$

Opgave. Bewijs dat, als $\underline{n} = (1, 0, 0)$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}\right)_{\underline{r}_0} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\underline{r}_0}$.

Met behulp van de kettingregel kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi(\underline{r}_0 + \underline{n}s)}{ds}\right)_{s=0} &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\underline{r}_0} \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\underline{r}_0} \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{\underline{r}_0} \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\underline{r}_0} \ell + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\underline{r}_0} m + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{\underline{r}_0} n. \end{aligned}$$

Beschouwen we $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ als de kentallen van een vector, gradient-vector genoemd:

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \quad (3.2)$$

en is θ de hoek tussen $\underline{n}$ en $\text{grad } \varphi$, dan is in elk punt $\underline{r}$ (zie 1.8; $|\underline{n}| = 1$):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} = \underline{n} \cdot \text{grad } \varphi = |\text{grad } \varphi| \cos \theta \quad (3.3)$$

Gevolg 1. $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}$ is maximaal, als $\theta = 0$ dus als $\underline{n}$ de richting van $\text{grad } \varphi$ heeft.
Uit deze eigenschap blijkt dat $\text{grad } \varphi$ onafhankelijk van het gekozen coördinatenstelsel te definiëren is.

Gevolg 2. $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} = 0$, als $\underline{n}$ loodrecht $\text{grad } \varphi$.

Bewering

De vectoren $\underline{n}$ waarvoor $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)_{\underline{r}_0} = 0$ zijn de raakvectoren in $\underline{r}_0$ aan het oppervlak $\varphi(x,y,z) = \text{constant}$ door $\underline{r}_0$.

Bewijs: het oppervlak S door $\underline{r}_0$ waarop $\varphi(\underline{r})$ constant is, heeft als vergelijking

$$\varphi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r}_0). \quad (*)$$

$\underline{n}$ is raakvector in $\underline{r}_0$ aan S , als de lijn

$$(\underline{r}) = \underline{r}_0 + \underline{n}s \quad (**)$$

met S twee samenvallende snijpunten heeft. Deze snijpunten worden gevonden door s op te lossen uit (*) en (**).

Substitutie geeft

$$\varphi(\underline{r}_0 + \underline{n}s) = \varphi(\underline{r}_0),$$

of (linkerlid ontwikkelen in een Taylorreeks)

$$\varphi(\underline{r}_0) + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_0 s^2 + \dots = \varphi(\underline{r}_0)$$

of (zie 3.1)

$$s \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)_{\underline{r}_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_0 s + \dots \right\} = 0.$$

We vinden twee oplossingen $s = 0$; d.i. twee samenvallende snijpunten $\underline{r} = \underline{r}_0$, indien $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)_{\underline{r}_0} = 0$. En omgekeerd.

Dus het raakvlak in $\underline{r}_0$ aan het oppervlak $\varphi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r}_0)$ staat loodrecht op $(\text{grad } \varphi)_{\underline{r}_0}$ (3.4)

De vergelijking van dit raakvlak is $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot (\text{grad } \varphi)_{\underline{r}_0} = 0$.

Voorbeeld

Voor een stuk metaal dat in een punt verwarmd wordt is $T(x,y,z)$ de temperatuur in $\underline{r}$ op een vast tijdstip. De oppervlakken $T(\underline{r}) = \text{constant}$

hebben in elk punt grad T als normaalvector. Deze temperatuurgradient houdt verband met de warmtestroom.

Onder de warmtestroomvector $\underline{I}(\underline{r}_0)$ verstaan we de raakvector in $\underline{r}_0$ aan de stroomlijn door $\underline{r}_0$, waarvan de grootte gelijk is aan de hoeveelheid warmte die per tijdseenheid en per oppervlakte-eenheid stroomt door een oppervlakte-element dat in $\underline{r}_0$ raakt aan het oppervlak $T(\underline{r}) = T(\underline{r}_0)$.

Experimenteel blijkt (bij benadering):

$$\underline{I} = \lambda \text{ grad } T$$

voor elk punt $\underline{r}$ binnen het beschouwde medium.

Is $\Delta\sigma$ een oppervlakte-element dat in $\underline{r}_0$ raakt aan $T(\underline{r}) = T(\underline{r}_0)$, dan gaat door $\Delta\sigma$ per tijdseenheid: $\Delta\sigma |\underline{I}(\underline{r}_0)| = (\Delta\sigma) \lambda |(\text{grad } T)_{\underline{r}_0}|$.

Maakt $\Delta\sigma$ een hoek θ met het raakvlak dan gaat door $\Delta\sigma$ per tijdseenheid evenveel als door zijn projectie op het raakvlak, dus

$$\Delta\sigma |\underline{I}(\underline{r}_0)| \cos \theta = (\Delta\sigma) (\underline{I}(\underline{r}_0) \cdot \underline{n}) = (\Delta\sigma) \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\underline{r}_0},$$

als $\underline{n}$ de eenheidsnormaalvector op $\Delta\sigma$ in $\underline{r}_0$ is.

4. De divergentie van een vector

Zij $\underline{v}(\underline{r})$ het vectorveld van een stroming in een medium: in elk punt $\underline{r}$ raakt $\underline{v}$ aan de stroomlijn, terwijl $|\underline{v}|$ gelijk is aan de hoeveelheid materie die per tijdseenheid en per oppervlakte-eenheid stroomt door een oppervlakte-element in $\underline{r}$ loodrecht $\underline{v}$.

Zij S een gesloten oppervlak in het medium.

Onder de flux F van $\underline{v}$ over S verstaan we de hoeveelheid materie die per tijdseenheid door S stroomt (stroming naar buiten positief gerekend).

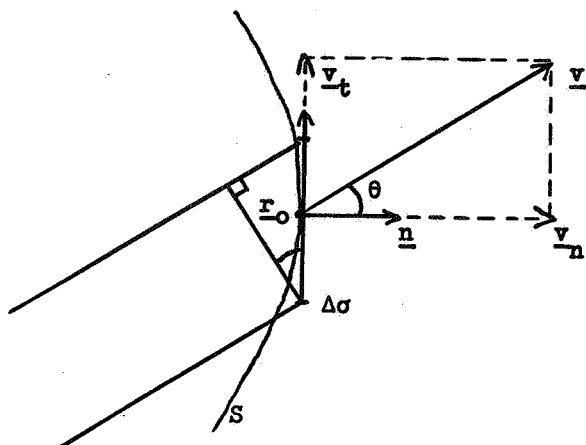
Zij $\Delta\sigma$ een oppervlakte-element in $\underline{r}$ rakend aan S, $\underline{n}$ de t.o.v. van S naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector op $\Delta\sigma$ in $\underline{r}$, en θ de hoek tussen $\underline{n}$ en $\underline{v}$.

De hoeveelheid materie die per tijdseenheid door $\Delta\sigma$ stroomt is

$$\Delta\sigma (\underline{v} \cdot \underline{n}).$$

Immers de loodrechte doorsnede van de cilinder door $\Delta\sigma$ met $\underline{v}$ als richting, maakt een hoek θ met $\Delta\sigma$. Dus de hoeveelheid materie per tijdseenheid is (loodrechte doorsnede): $|\underline{v}| \Delta\sigma \cos \theta = (\underline{v} \cdot \underline{n}) \Delta\sigma$.

We zien dit ook als volgt. Is $\underline{v}_n$ de projectie van $\underline{v}$ op $\underline{n}$ en



$\underline{v}_t = \underline{v} - \underline{v}_n$, dan is $\underline{v}_t$ loodrecht $\underline{n}$. De stroming wordt alleen veroorzaakt door $\underline{v}_n$, dus de hoeveelheid materie per tijds-eenheid is gelijk aan

$$\Delta\sigma |\underline{v}_n| = |\underline{v}| \Delta\sigma \cos \theta.$$

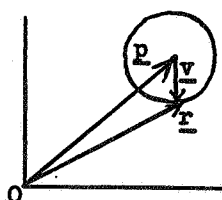
Dit is de flux door $\Delta\sigma$.

Voor F vinden we (zie 2.10)

$$F = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma \quad (4.1)$$

F is de hoeveelheid materie die binnen S ontstaat (is de materie incompressibel en bevat S geen bronnen, dan zal $F = 0$ zijn).

Voorbeeld



Zij S de bol $|\underline{r}-\underline{p}| = a$ en $\underline{v} = \underline{r}-\underline{p}$.

De normaalvector op S heeft de richting van $\underline{v}$, dus $\underline{v} \cdot \underline{n} = |\underline{v}| |\underline{n}| = |\underline{v}| = a$ zodat de flux van $\underline{v}$ over S gelijk is aan

$$\iint_S (\underline{r}-\underline{p}) \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a \cdot 4\pi a^2 = 3V \quad (4.2)$$

waarbij V het door S omsloten volume voorstelt. Dit vectorveld is dus niet bronvrij.

Binnen S ontstaan $3V$ eenheden, dus per eenheid van volume 3 eenheden.

We zien dat in dit voorbeeld $\lim_{a \rightarrow 0} (\text{flux}) = 0$ en $\lim_{a \rightarrow 0} (\text{flux} / \text{volume}) = 3$.

In het algemeen (voor een fatsoenlijk vectorveld) zal $\lim_{V \rightarrow 0} (\text{flux}) = 0$.

Voor de limiet $\lim_{V \rightarrow 0} (\text{flux} / \text{volume})$, die afhankelijk zal zijn van

(x, y, z) , kan men bewijzen dat ze onafhankelijk is van de vorm van S .

Onder de divergentie van een vectorveld $\underline{v}$ in $\underline{r}$ verstaan we nu dat getal, dus

$$\text{div } \underline{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma \quad (4.3)$$

(S is een gesloten oppervlak om $\underline{r}$ met volume V en uitwendige normaal $\underline{n}$).

Zo is bijvoorbeeld $\text{div } \underline{r} = 3$ (zie boven).

Stelling: Met $\underline{v} = (u, v, w)$ is

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.4)$$

$$(\text{bijvoorbeeld } \text{div } \underline{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3)$$

Bewijs: Neem voor S de begrenzing van een rechthoekig blokje met ribben evenwijdig aan de assen en met de punten O en $\underline{\Delta r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ als twee der hoekpunten.

Met $S_a, S_v, S_\ell, S_r, S_o, S_b$ geven we de zijvlakken aan die opvolgend liggen in de vlakken $x=0, x=\Delta x, y=0, y=\Delta y, z=0, z=\Delta z$. Voor S_ℓ en S_r zijn de t.o.v. S uitwendige normalen:

$(0, -1, 0)$ en $(0, 1, 0)$ zodat $\underline{v} \cdot \underline{n} = -v(x, 0, z)$ op S_ℓ en $\underline{v} \cdot \underline{n} = +v(x, \Delta y, z)$ op S_r .

Onder gebruikmaking van de middelwaardestelling der differentiaalrekening en die der integraalrekening, vinden we:

$$\iint_{S_\ell} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma + \iint_{S_r} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma =$$

$$\int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \{v(x, \Delta y, z) - v(x, 0, z)\} =$$

$$\Delta y \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, \eta_2, z) \right) =$$

$\Delta y \Delta x \Delta z \frac{\partial v}{\partial y}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, waarbij (ξ_2, η_2, ζ_2) een punt van het blokje is.

Analoog

$$\iint_{S_a} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma + \iint_{S_v} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$

$$\iint_{S_o} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma + \iint_{S_b} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \Delta z \Delta x \Delta y \frac{\partial w}{\partial z}(\xi_3, \eta_3, \zeta_3).$$

$V = \Delta x \Delta y \Delta z$, dus volgens (4.3) is

$$(\operatorname{div} \underline{v})_{\underline{o}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\underline{o}} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{\underline{o}} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{\underline{o}}.$$

Voor $(\operatorname{div} \underline{v})_{\underline{r}}$ nemen we het blokje met $\underline{r}$ en $\underline{r} + \Delta \underline{r}$ als hoekpunten. Het bewijs verloopt op dezelfde manier.

Het getal $(\operatorname{div} \underline{v})_{\underline{r}}$ geeft aan de hoeveelheid materie die in $\underline{r}$ per eenheid van tijd en eenheid van volume ontstaat.

Voorbeeld

(zie blz. PD-12). Hebben we een stationnaire temperatuursverdeling in een metalen blok (T onafhankelijk van de tijd), dan is dus $\operatorname{div} \underline{I} = 0$.

Omdat $\underline{I} = \lambda \text{ grad } T$, moet T dus voldoen aan (λ constant verondersteld)

$$\begin{aligned}
 & \text{div } (\lambda \text{ grad } T) = 0 \\
 \text{of} \quad & \text{div grad } T = 0 \\
 \text{of} \quad & \text{div} \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \\
 \text{of} \quad & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

(4.5) is de vergelijking van Laplace.

Divergentie theorema (Stelling van Gauss)

Is $\underline{v}$ een vectorveld in de ruimte, S een gesloten oppervlak dat een gebied G met volume V omsluit en $\underline{n}$ de uitwendige normaal op S , dan is

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iiint_G \text{div } \underline{v} \, d\tau \quad (4.6)$$

Bewijs: Verdeel G door een stelsel vlakken in blokjes met volume ΔV en zijvlakken $S_1, \dots, S_6$.

$$\text{In zo'n blokje is } (\text{div } \underline{v})_{\underline{r}} \Delta V \sim \sum_{j=1}^6 \iint_{S_j} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma.$$

Valt het zijvlak S_j van een blokje samen met het zijvlak S'_j van een buurblokje, dan is (tegengestelde normalen)

$$\iint_{S_j} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma + \iint_{S'_j} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0.$$

Aan de som $\sum_{\text{blokjes}} (\text{div } \underline{v})_{\underline{r}} \Delta V$ wordt dus door de inwendige

blokjes geen bijdrage geleverd, terwijl de bijdrage van een randblokje gelijk is aan

$$\iint_{S_r} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma, \text{ als } S_r \text{ het zijvlak is dat op } S \text{ ligt.}$$

Dus

$$\sum_{\text{blokjes}} (\text{div } \underline{v})_{\underline{r}} \Delta V \approx \sum_{\text{randblokjes}} \iint_{S_r} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

of (limiet nemen met $\Delta V \rightarrow 0$)

$$\iiint_G \text{div } \underline{v} \, d\tau = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

Gevolg: In een divergentie vrij veld is $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$ voor elke gesloten oppervlak S .

Voorbeeld

We verifiëren de stelling van Gauss voor het getal $\underline{v} = (x^3, y^3, z^3)$;
 $G: |\underline{r}| < a$. (a is een constante).

De vergelijking van S is: $|\underline{r}| = a$, dus een parameter-voorstelling:

$$\underline{r}(u, v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v) \\ (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi)$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \frac{1}{a} (x, y, z)$$

Op S is

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = \frac{1}{a} (x^4 + y^4 + z^4) \\ = a^3 (\cos^4 u \sin^4 v + \sin^4 u \sin^4 v + \cos^4 v)$$

$$\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| = a^2 |\sin v|.$$

Dus (zie 2.11)

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv \, a^5 (\cos^4 u \sin^4 v + \sin^4 u \sin^4 v + \cos^4 v) \sin v \\ = \frac{12}{5} \pi a^5$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2, \text{ dus}$$

$$\begin{aligned} \iiint_G \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} dv \int_0^a dr (3r^2) r^2 \sin v \\ &= \frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

We voeren een vectoroperator, de nablavector, in:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

Dan kunnen we dus schrijven

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi \quad (4.8)$$

en

$$\operatorname{div} \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} \quad (4.9)$$

Opmerking

De eigenschap $\varphi \underline{v} = \underline{v} \varphi$ geldt niet voor de vector ∇ .

Tenslotte nog de (scalaire) operator van Laplace:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.10)$$

Hiermee is (4.5) te schrijven als $\Delta T = 0$.

Opgaven:

a. Bewijs:

$$\operatorname{grad}(\varphi \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$$

b. Bewijs:

$$\operatorname{div}(\varphi \underline{v}) = \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \underline{v} \quad (4.11)$$

c. Bewijs:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) + \varphi \Delta \psi \quad (4.12)$$

- d. Verifieer de stelling van Gauss als

$$\underline{v} = (x^2, y^2 z, yz)$$

en

$$G: \text{Kubus } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

- e. G is een gebied in de ruimte met randoppervlak S .

$$\underline{r} = (x, y, z).$$

$$\text{Bewijs: } \iint_S |\underline{r}|^2 (\underline{r} \cdot \underline{n}) \, d\sigma = 5 \iiint_G |\underline{r}|^2 \, d\tau$$

- f. S is een gesloten oppervlak dat een gebied met volume V omsluit.

$$\underline{r} = (x, y, z) \quad ; \quad r = |\underline{r}|.$$

Druk

$$\iint_S (\underline{n} \cdot \text{grad } r^2) \, d\sigma$$

uit in V .

- g. Gegeven: $\underline{v} = (ye^{yz}, -\sin(x+z) + y, x^2 - z)$

$$S \text{ is de halve bol } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$\underline{n}$ is de normaalvector op S , van de oorsprong afwijzend.

$$\text{Bereken: } \iint_S (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, d\sigma$$

(Antwoord: $\frac{4}{3}\pi$; aanwijzing: gebruik de stelling van Gauss, maar bedenk dat de gegeven S nog geen gesloten oppervlak is).

- h. G is een gebied in de ruimte, omsloten door S .

$$\text{Bewijs dat } \iiint_G (x^2 + y^2) \, d\tau = \frac{1}{4} \iint_S (x^2 + y^2)(x\underline{i} + y\underline{j}) \cdot \underline{n} \, d\sigma.$$

5. De rotatie van een vectorveld

Onder de rotatie van een vectorveld $\underline{v} = (u, v, w)$ verstaan we de vector

$$\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} \quad (5.1)$$

Dus (zie 1.13 en 4.7)

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \underline{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \underline{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \underline{k} \quad (5.2)$$

We zullen voor $\text{rot } \underline{v}$ nog een andere uitdrukking afleiden. Daartoe beschouwen we eerst de draaiing van een star lichaam om een vaste as (door de oorsprong gedacht). Zij P een punt van het lichaam met plaatsvector $\underline{r}(t)$, $r = |\underline{r}|$, α de hoek tussen de as en OP en ω de hoeksnelheid. Tijdens de draaiing beschrijft P een cirkel C met straal $r \sin \alpha$ in een vlak V loodrecht de as. De afstand van P tot de as is dan $r \sin \alpha$. De snelheidsvector $\underline{v}$ in $\underline{r}$, in V raakvector aan C, staat loodrecht op het vlak door OP en de as, terwijl $|\underline{v}| = \omega r \sin \alpha$.

Dus kunnen we schrijven

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (5.3)$$

als $\underline{\omega}$ de vector langs de as is met $|\underline{\omega}| = \omega$ en een bij de draaiing passende richting (zoals de voortgaande beweging en de draaiing van een rechtse schroef bij elkaar passen).

Dus

$$\underline{r}(t + \Delta t) = \underline{r}(t) + (\underline{\omega} \Delta t) \times \underline{r}(t). \quad (5.4)$$

[Laat nu het lichaam tegelijkertijd draaien om twee elkaar snijdende assen met hoeksnelheidsvectoren $\underline{\omega}_1$ en $\underline{\omega}_2$. In de tijd Δt wordt P verplaatst van $\underline{r}(t)$ naar $\underline{r}(t + \Delta t)$. We kunnen $\underline{r}(t + \Delta t)$ echter niet bepalen door in (5.4) voor $\underline{\omega}$ te substitueren $\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$.

Is $\underline{p}_1(t + \Delta t)$ het punt waar P terecht komt als we het lichaam eerst een tijd Δt onderwerpen aan de draaiing $\underline{\omega}_1$ en daarna een tijd Δt aan de draaiing $\underline{\omega}_2$, dan is (in (5.4) voor $\underline{r}(t)$ substitueren $\underline{r}(t) + (\Delta t) \underline{\omega}_1 \times \underline{r}(t)$ en voor $\underline{\omega}$ substitueren $\underline{\omega}_2$):

$$\begin{aligned} \underline{p}_1(t + \Delta t) &= \underline{r}(t) + (\Delta t)(\underline{\omega}_1 \times \underline{r}(t) + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}(t)) \\ &\quad + (\Delta t)^2 \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_1 \times \underline{r}(t)). \end{aligned}$$

Met de draaiingen in omgekeerde volgorde komt P terecht in

$$\underline{p}_2(t + \Delta t) = \underline{r}(t) + (\Delta t)(\underline{\omega}_2 \times \underline{r}(t) + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}(t)) \\ + (\Delta t)^2 \underline{\omega}_1 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{r}(t)).$$

Kennelijk is $\underline{p}_1(t + \Delta t) \neq \underline{p}_2(t + \Delta t)$.

Wel geldt

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{p}_1(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{p}_2(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \\ = \underline{\omega}_1 \times \underline{r} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}. \\ = \underline{v}_1 + \underline{v}_2]$$

Zij K een vlakke gesloten kromme.

Onder de circulatie van $\underline{v}$ langs K verstaan we de lijnintegraal (zie 2.8)

$$\int_K \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds = \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} \quad (5.5)$$

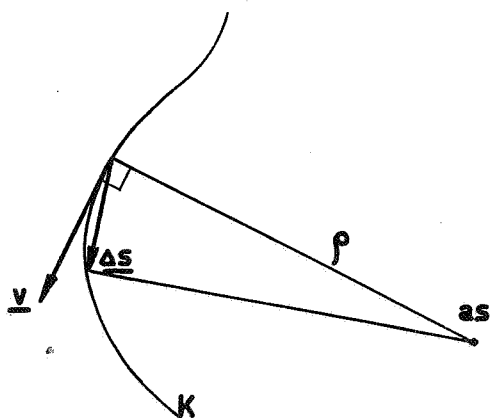
($\underline{t}$: eenheidsraakvector aan K)

Als $\underline{\omega}$ de hoeksnelheidsvector is bij de rotatie om een vaste as (dus $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$), K een gesloten kromme in een vlak V, $\underline{n}$ de eenheidsnormaalvector op V, O de door K omsloten oppervlakte, dan is

$$\int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} = 2(\underline{\omega} \cdot \underline{n})O \quad (5.6)$$

(K wordt doorlopen in een bij $\underline{n}$ passende richting).

Bewijs: Stel $V \perp$ as.

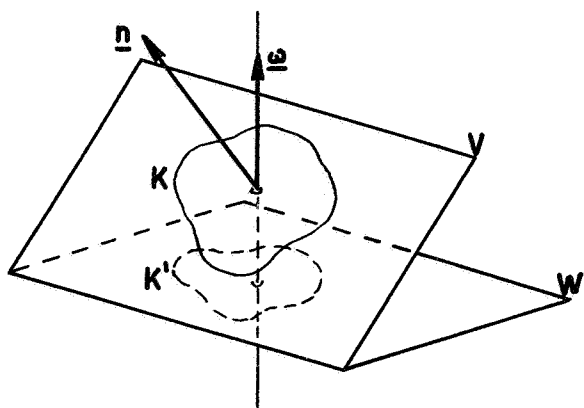


$$\int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \underline{v} \cdot \underline{\Delta s} \\ = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum |\underline{v}| (\text{projectie van } \Delta s \text{ op } \underline{v}) \\ = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \omega p \text{ (hoogte van de driehoek)}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum 2\omega \text{ (oppervlakte van de driehoek)}$$

$$= 2\omega_0.$$

V willekeurig. Zij W een vlak $\perp$ as; K' en O' de projecties van K en O op W; θ de hoek tussen V en W, dus ook tussen $\underline{\omega}$ en $\underline{n}$. Het inwendig product $\underline{v} \cdot \underline{\Delta s}$ is gelijk aan het inwendig product van de projecties van $\underline{v}$ en $\underline{\Delta s}$, omdat $\underline{v}$ gelijk is aan de projectie van $\underline{v}$.



Dus

$$\begin{aligned} \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} &= \int_{K'} \underline{v} \cdot \underline{ds} = 2 \omega O' = \\ &= 2 \omega O \cos \theta = 2(\underline{\omega} \cdot \underline{n})O. \end{aligned}$$

Uit $\underline{v}$ is dus $\underline{\omega}$ te vinden.
Het getal

$$\frac{1}{O} \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds}$$

is maximaal als K in een vlak loodrecht op de as ligt.

Verder merken we op:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x)$$

dus

$$\text{rot } \underline{v} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\underline{\omega}.$$

Voor een algemeen vectorveld $\underline{v} = (u, v, w)$ zullen we nu bewijzen, dat in $\underline{r}$

$$\lim_{O \rightarrow 0} \frac{1}{O} \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} = \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \quad (5.7)$$

waarbij K een gesloten kromme is in een vlak door $\underline{r}$, O de door K omsloten oppervlakte, $\underline{n}$ de eenheidsnormaalvector op het vlak door K , terwijl de omloopszin van K en de richting van $\underline{n}$ bij elkaar passen.

Bewijs: Zonder bewijs wordt hier meegedeeld dat de limiet in het linkerlid onafhankelijk is van de keuze van de kromme in het vlak. Het vlak behoeft **geen** plat vlak te zijn.

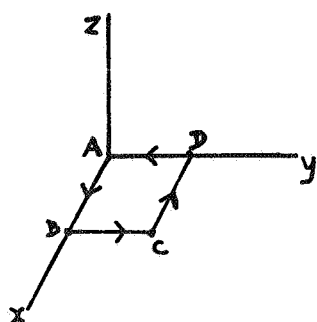
Breng door $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ het vlak $z = z_0$ aan, en beschouw in dit vlak als gesloten kromme K de gebroken lijn ABCDA met

$$A = (x_0, y_0, z_0), B = (x_0 + \Delta x, y_0, z_0), C = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0),$$

$$D = (x_0, y_0 + \Delta y, z_0).$$

$$\int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_B^C \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_C^D \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_D^A \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

$$= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} u(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} v(x_0 + \Delta x, y, z_0) dy$$



$$- \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} u(x, y_0 + \Delta y, z_0) dx$$

$$- \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} v(x_0, y, z_0) dy =$$

$$= -\Delta y \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{\partial u}{\partial y} (x, y_0 + \eta_1, z_0) dx + \Delta x \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial v}{\partial x} (x_0 + \xi_1, y, z_0) dy =$$

$$= -\Delta y \Delta x \frac{\partial u}{\partial y} (x_0 + \xi_2, y_0 + \eta_1, z_0) + \Delta x \Delta y \frac{\partial v}{\partial x} (x_0 + \xi_1, y_0 + \eta_2, z_0)$$

zodat ($0 = \Delta x \Delta y$)

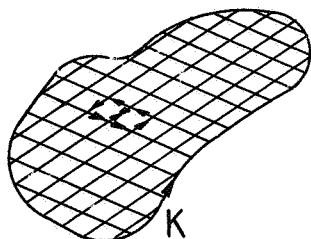
$$\lim_{O \rightarrow 0} \frac{1}{0} \int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = (\text{rot } \underline{v})_z.$$

Stelling van Stokes

Zij K een gesloten kromme en S een oppervlak met K als randkromme, dan is

$$\int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} = \iint_S \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, d\sigma \quad (5.8)$$

waarbij de richting van $\underline{n}$, de normaal op S , past bij de omloopsrichting van K .



Bewijs: Verdeel S door een stelsel lijnen in vier-zijdige oppervlakte-elementjes met oppervlakte ΔS en zijden K_1, K_2, K_3, K_4 .

Nu is lokaal

$$\underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, \Delta S \approx \sum_{j=1}^4 \int_{K_j} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

Valt zijde K_j samen met zijde K'_j van een buur-element, dan is (tegen- gestelde richting van doorlopen)

$$\int_{K_j} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{K'_j} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0.$$

Aan $\sum \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, \Delta S$ wordt dus door de inwendige oppervlakte-elementjes geen bijdrage geleverd, terwijl de bijdrage van een randelement gelijk is aan

$$\int_{K_r} \underline{v} \cdot \underline{ds} \text{ als } K_r \text{ de zijde is die op } K \text{ ligt.}$$

Dus

$$\sum \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \Delta S \approx \sum \int_{K_r} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds}$$

of (limiet nemen met $\Delta S \rightarrow 0$)

$$\iint_S \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} d\sigma = \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds}$$

Opgaven:

i. Verifieer de formule van Stokes voor het geval:

$$\underline{v} = (x, x, x) \\ S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0.$$

j. Ook, als $\underline{v} = (x, x, x)$ en

$$S : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0.$$

k. Bepaal

$$\iint_S \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} d\sigma \text{ als } \underline{v} = (x, x, x) \\ (\underline{n} \text{ is de normaal naar buiten})$$

en als S het gesloten oppervlak is dat ontstaat door vereniging van de oppervlakken uit i) en j).

l. Verifieer de formule van Stokes, als $\underline{v} = \underline{r}$ en S de driehoek met hoekpunten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$.

m. Bewijs:

$$\text{rot } (\varphi \underline{v}) = \varphi \text{ rot } \underline{v} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{v}$$

en

$$\text{div } (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} \cdot \text{rot } \underline{u} - \underline{u} \cdot \text{rot } \underline{v}$$

6. Enkele opmerkingen

Een veld $\underline{v}$ heeft een potentiaal, als er een functie α bestaat zodanig dat in elk punt van het beschouwde gebied $\underline{v} = \text{grad } \alpha$.

Een veld $\underline{v}$ is conservatief als $\int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0$ voor elke gesloten kromme

in het beschouwde gebied. (Is $\underline{v}$ een krachtvector, dan wordt in dit geval langs een gesloten weg geen arbeid verricht).

Een veld $\underline{v}$ is rotatievrij als in elk punt van het beschouwde gebied $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.

Een veld $\underline{v}$ heeft een vectorpotential, als er een veld $\underline{a}$ bestaat zodanig dat in elk punt van het beschouwde gebied $\underline{v} = \text{rot } \underline{a}$.

Een veld $\underline{v}$ is bronvrij als $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$ voor elk gesloten oppervlak in het beschouwde gebied.

Een veld $\underline{v}$ is divergentievrij als in elk punt van het beschouwde gebied $\text{div } \underline{v} = 0$.

Voor twee oppervlakken S_1 en S_2 met dezelfde randkromme K geldt (zie 5.8)

$$\iint_{S_1} \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, d\sigma = \iint_{S_2} \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, d\sigma$$

($\underline{n}$ passend bij K),

of - de vereniging S van S_1 en S_2 is een gesloten oppervlak dat een gebied G omsluit -

$$\iint_S \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v} \, d\sigma = 0$$

($\underline{n}$ tov G naar buiten)

Conclusie: als $\underline{Y} = \text{rot } \underline{v}$ en S een gesloten oppervlak dan

$$\iint_S \underline{Y} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0 \quad (6.1)$$

(een veld met een vectorpotential is bronvrij).

Met (4.6) volgt, als $\underline{Y} = \text{rot } \underline{v}$

$$\iiint_G \text{div } \underline{Y} \, d\tau = 0$$

Dit volgt ook door berekening (doen!), want voor elk veld $\underline{v}$ is

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0 \quad \text{of} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = 0 \quad (6.2)$$

(een veld met een vectorpotentialaal is divergentievrij)

Opmerking

Bij de berekening maken we gebruik ervan dat de componenten van $\underline{v}$ continue partiële afgeleiden van de tweede orde bezitten.

We beschouwen nu een functie $\varphi(x, y, z)$ met continue partiële afgeleiden van de tweede orde.

Men toont door berekening aan:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \underline{0} \quad (6.3)$$

of als $\underline{v} = \operatorname{grad} \varphi$ dan $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$.
(een veld met een potentiaal is rotatievrij).

Omgekeerd: Geldt voor een vectorveld $\underline{v}$ in een gebied $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$,
dan is er een functie φ zodanig dat in dit gebied
 $\underline{v} = \operatorname{grad} \varphi$.
(een rotatievrij veld heeft een potentiaal).

Bewijs: Het is duidelijk dat als φ een dergelijke functie is, ook de functies $\varphi + \text{constante}$ voldoen.

We geven φ in een punt A de functiewaarde φ_A . Zij K een weg van A naar een punt B.

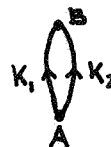
We definiëren nu:

$$\varphi(B) = \varphi_A + \int_{(K)}^B \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

Deze definitie is slechts geoorloofd als de lijnintegraal

$$\int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s} \quad \text{onafhankelijk is van de gekozen weg.}$$

Beschouw twee wegen K_1 en K_2 van A naar B en zij K de gesloten kromme $K_1 + (-K_2)$.



Volgens (5.8) is nu, omdat $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$,

$$\int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0.$$

(een rotatievrij veld is conservatief)

Dus

$$\int_{K_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{-K_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0$$

of

$$\int_{K_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{K_2} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

De definitie is dus geoorloofd.

Is nu $\underline{v} = \text{grad } \varphi$?

Stel $B = (x_0, y_0, z_0)$ en neem $B' = (x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$.

$$\varphi(B') - \varphi(B) = \varphi_A + \int_A^{B'} \underline{v} \cdot d\underline{s} - (\varphi_A + \int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s})$$

$$= \int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_B^{B'} \underline{v} \cdot d\underline{s} - \int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

$$= \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} v(x_0, y, z_0) dy$$

$$= \Delta y \cdot v(x_0, y_0 + \eta, z_0)$$

dus

$$v(x_0, y_0 + \eta, z_0) = \frac{\varphi(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

of (limiet overgang)

$$v(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{\underline{r}_0}$$

Analoog $u(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\underline{r}_0}$

$$w(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\underline{r}_0}$$

dus

$$\underline{v} = \text{grad } \varphi.$$

Voorbeeld 1

Het gravitatieveld der aarde

Kies z-as loodrecht aardoppervlak naar boven.

De kracht op de eenheid van massa wordt gegeven door het veld $(0, 0, -g)$.

De door de kracht verrichte arbeid bij verplaatsing van m eenheden van massa van een punt A naar een punt B is ($\underline{k} = (0, 0, -mg)$):

$$\int_A^B \underline{k} \cdot d\underline{s} = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A)$$

Voor elke gesloten kromme is $\oint \underline{k} \cdot d\underline{s} = 0$: het veld is conservatief.

Het veld is rotatievrij: $\text{rot } \underline{k} = \underline{0}$.

Het veld heeft een potentiaal: met $\varphi = -mgz + C$ is $\underline{k} = \text{grad } \varphi$.

Kiezen we $\varphi = 0$ als $z = 0$, dan is $\varphi = -mgz$.

Voorbeeld 2

Het gravitatieveld der zon

[De krachten die de zon en de aarde op elkaar uitoefenen zijn naar elkaar gericht en in grootte gelijk aan evenredigheidsconstante $\times$

$\frac{m_Z m_A}{r^2}$ waarbij m_Z en m_A de massa's zijn van zon en aarde, en r de afstand is van Z tot A].

Neem een coördinatenstelsel met de zon als oorsprong. De kracht op m massa-eenheden in $\underline{r}$ wordt gegeven door het veld $\underline{k}$ waarvoor geldt ($r = |\underline{r}|$) : in elk punt is $\underline{k}$ naar Z gericht en $|\underline{k}| = \frac{m}{r^2}$.

(Afgezien van een evenredigheidsfactor).

Dus

$$\underline{k} = \frac{-m\underline{r}}{r^3}.$$

Men toont door berekening aan: $\text{rot } \underline{k} = \underline{0}$.

Het veld is rotatievrij: er moet dus een potentiaal bestaan.
Neem punten A en B op een rechte door Z op afstanden r_1 en r_2 van Z.

$$\begin{aligned}\varphi(B) &= \varphi_A + \int_{r_1}^{r_2} \underline{k} \cdot \underline{ds} = \varphi_A - m \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{dr} = \varphi_A - m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \varphi_A + m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)\end{aligned}$$

dus $\varphi(\underline{r}) = C + \frac{m}{r}$ en $\underline{k} = m \text{ grad } \frac{1}{r}$.

De equipotentiaalvlakken zijn de vlakken $r = \text{constant}$ (bollen om Z).

We berekenen nog de flux door een bol S met straal r om Z.

S is een bol, dus $\underline{n} = \frac{1}{r} \underline{r}$ zodat $\underline{k} \cdot \underline{n} = - \frac{m}{r^2}$.

$$\text{(Of: } \underline{k} \cdot \underline{n} = \text{grad } \varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} = (\text{S is een bol}) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{m}{r^2} \text{)}.$$

De flux door S (zie 4.1) is gelijk aan:

$$- \frac{m}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = - 4\pi m,$$

dus constant voor elke bol om Z.

Berekening leert:

$$\text{div } \underline{k} = - m \text{ div } \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{in } \underline{r} \neq \underline{0} \\ \text{niet gedefinieerd} & \text{in } \underline{0}. \end{cases}$$

Zij S een gesloten oppervlak dat een gebied G omsluit.

Z niet in G: flux door S = 0 (stelling van Gauss).

Z in G: de stelling van Gauss is niet toepasbaar. Sla nu een bol B om Z met randoppervlak S_1 ; B in G.

Op het gebied G-B, begrensd door S en S_1 , is de stelling van Gauss toepasbaar:

$$\iint_{S+S_1} \underline{k} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$$

($\underline{n}$ t.o.v. G-B naar buiten)

of

$$\iint_S \underline{k} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iint_{S_1} \underline{k} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

($\underline{n}$ t.o.v. G resp. t.o.v. B
naar buiten)

dus

$$Z \text{ in } G: \text{ flux door } S = -4\pi m.$$

Opmerking

$\text{div } \underline{k} = 0$ in $\underline{r} \neq \underline{0}$ betekent dat $C + \frac{m}{r}$ een oplossing is van de vergelijking van Laplace: $\Delta\phi = 0$.

7. Kromlijnige orthogonale coördinaten

Tot hier toe werkten we met rechthoekige coördinaten: x, y, z . We hebben, naast definities die onafhankelijk van het coördinatenstelsel waren, uitdrukkingen gevonden in deze rechthoekige coördinaten voor

lijnelement ds : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

volume-element : $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

gradient : $\text{grad } U(\underline{r}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$

divergentie : $\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

rotatie : $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Laplace-operator $\text{div grad } U(\underline{r}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

Voeren we nu parameters q_1, q_2, q_3 in, zodanig dat de functies

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (7.1)$$

in elk punt een 1-1-duidelijk verband geven tussen het drietal (x, y, z) en het drietal (q_1, q_2, q_3) , dan is (q_1, q_2, q_3) op te vatten als een nieuw stel coördinaten, kromlijnige in het algemeen, van het beschouwde punt.

Deze coördinaten zijn orthogonaal indien in ieder punt de coördinaatlijnen t.w.

$$\{q_2 = c_2, q_3 = c_3\}, \{q_3 = c_3, q_1 = c_1\} \text{ en } \{q_1 = c_1, q_2 = c_2\}$$

loodrecht op elkaar staan.

Een scalaire functie $U(x,y,z)$ uitdrukken in deze coördinaten betekent: substitueer (7.1).

Van een vectorfunctie $\underline{v}(x,y,z)$ willen we de componenten kennen langs de nieuwe coördinaatlijnen. Door substitutie van (7.1) vinden we deze componenten niet: het blijven de componenten langs de x-, y- en z-as, uitgedrukt in q_1, q_2, q_3 .

We beschouwen dit probleem hier niet algemeen, bepalen slechts enkele uitdrukkingen in cilinder- en bolcoördinaten.

Cilindercoördinaten (r, φ, z)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \\ 0 \leq r; 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (7.2)$$

dus
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \text{ te bepalen uit } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ en het teken van } x \text{ of } y \\ z = z \end{cases}$$

De coördinaatvlakken zijn cilindervlakken ($r = c_1$), vlakken door de z-as ($\varphi = c_2$) en vlakken $\perp$ z-as ($z = c_3$). Het zijn orthogonale coördinaten.

Een vermeerdering van r met Δr , van φ met $\Delta \varphi$ of van z met Δz geeft aan het punt (r, φ, z) een verplaatsing langs de betreffende coördinaatlijn respectievelijk ter grootte $\Delta r, r\Delta \varphi, \Delta z$.

Lijnelement : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$.

Volume-element: $\Delta V = (\Delta r)(r\Delta \varphi)(\Delta z) = r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$

De component van grad U in een richting is, als $\Delta \ell$ de grootte van een verplaatsing in die richting is, gelijk aan

$$\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\text{toename van } U \text{ bij de verplaatsing}}{\Delta \ell}$$

In cilindercoördinaten is

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (7.3)$$

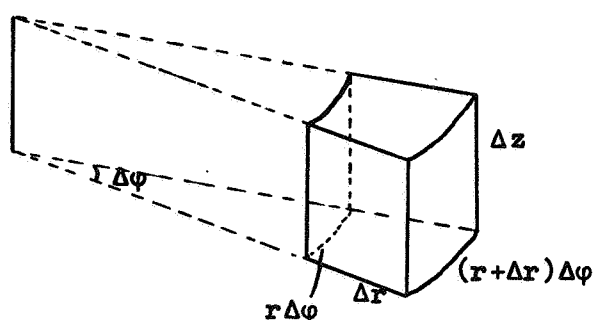
bv.

$$(\text{grad } U)_\varphi = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{U(r, \varphi + \Delta\varphi, z) - U(r, \varphi, z)}{r \Delta\varphi}.$$

Laat vectorveld $\underline{v}$ in cilindercoördinaten gegeven zijn:

$$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\text{div } \underline{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{flux}}{\Delta V}$$



flux door het volume-element =

$$\begin{aligned} & - v_1(r, \varphi, z) r \Delta\varphi \Delta z + v_1(r + \Delta r, \varphi, z) (r + \Delta r) \Delta\varphi \Delta z + \\ & - v_2(r, \varphi, z) \Delta r \Delta z + v_2(r, \varphi + \Delta\varphi, z) \Delta r \Delta z + \\ & - v_3(r, \varphi, z) r \Delta r \Delta\varphi + v_3(r, \varphi, z + \Delta z) r \Delta r \Delta\varphi = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \{v_1(r, \varphi, z) r\} \Delta r \Delta\varphi \Delta z + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_2(r, \varphi, z) \Delta\varphi \Delta r \Delta z + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} v_3(r, \varphi, z) \Delta z r \Delta r \Delta\varphi \end{aligned}$$

$$\Delta V = r \Delta r \Delta\varphi \Delta z$$

dus in cilindercoördinaten:

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial z}. \quad (7.4)$$

De Laplace-operatie in cilindercoördinaten (met 7.3 en 7.4):

$$\begin{aligned} \Delta U &= \text{div grad } U \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Zonder bewijs vermelden we:

Als $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in cilindercoördinaten, dan

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_2)}{\partial z} \right\}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial r}, \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(rv_2)}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right\} \right) \quad (7.6)$$

Bolcoördinaten (r, β, φ)

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \varphi \\ y = r \cos \beta \sin \varphi \\ z = r \sin \beta \end{cases} \quad (7.7)$$

$r \geq 0; \frac{1}{2}\pi \geq \beta \geq -\frac{1}{2}\pi; 0 \leq \varphi < 2\pi$
 $(\beta \text{ is de breedtehoek; met } \theta \text{ als poolhoek is } \beta = \frac{1}{2}\pi - \theta, \text{ dus toenemende } \beta \text{ komt overeen met afnemende } \theta)$

dus

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \beta \text{ te bepalen uit } \tan \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \varphi \text{ te bepalen uit } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ en het teken van } x \text{ en } y. \end{cases}$$

De coördinaatvlakken zijn bolvlakken ($r = c_1$), kegelvlakken ($\beta = c_2$) en vlakken door de z-as ($\varphi = c_3$). Het zijn orthogonale coördinaten. Een vermeerdering van r met Δr , van β met $\Delta \beta$ of van φ met $\Delta \varphi$ geeft aan het punt (r, β, φ) een verplaatsing langs de betreffende coördinaatlijn respectievelijk ter grootte Δr , $r \Delta \beta$, $r \cos \beta \Delta \varphi$.

Lijnelement : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\varphi^2$

Volume-element: $\Delta V = (\Delta r)(r \Delta \beta)(r \cos \beta \Delta \varphi) = r^2 \cos \beta \Delta r \Delta \beta \Delta \varphi$.

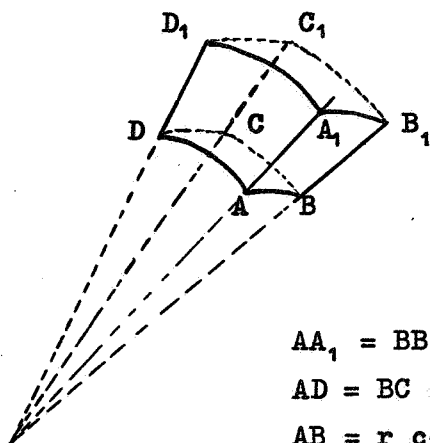
In bolcoördinaten is

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \beta}, \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \quad (7.8)$$

want bv.

$$(\text{grad } U)_\varphi = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{U(r, \beta, \varphi + \Delta \varphi) - U(r, \beta, \varphi)}{r \cos \beta \Delta \varphi}.$$

Laat $\underline{v}$ in bolcoördinaten gegeven zijn: $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



$$\begin{aligned}
 AA_1 &= BB_1 = CC_1 = DD_1 = \Delta r \\
 AD &= BC = r \Delta \beta & ; & A_1 D_1 = B_1 C_1 = (r + \Delta r) \Delta \beta \\
 AB &= r \cos \beta \Delta \varphi & ; & A_1 B_1 = (r + \Delta r) \cos \beta \Delta \varphi \\
 DC &= r \cos (\beta + \Delta \beta) \Delta \varphi & ; & D_1 C_1 = (r + \Delta r) \cos (\beta + \Delta \beta) \Delta \varphi
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{flux}}{\Delta V}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{flux} &= -v_1(r, \beta, \varphi) r^2 \cos \beta \Delta \beta \Delta \varphi + v_1(r + \Delta r, \beta, \varphi) (r + \Delta r)^2 \cos \beta \Delta \beta \Delta \varphi + \\
 &\quad - v_2(r, \beta, \varphi) r \cos \beta \Delta r \Delta \varphi + v_2(r, \beta + \Delta \beta, \varphi) r \cos (\beta + \Delta \beta) \Delta r \Delta \varphi + \\
 &\quad - v_3(r, \beta, \varphi) r \Delta r \Delta \beta + v_3(r, \beta, \varphi + \Delta \varphi) r \Delta r \Delta \beta \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \{ (r + \epsilon_1)^2 v_1(r + \epsilon_1, \beta, \varphi) \} \Delta r \cos \beta \Delta \beta \Delta \varphi + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \beta} \{ \cos (\beta + \epsilon_2) v_2(r, \beta + \epsilon_2, \varphi) \} \Delta \beta r \Delta r \Delta \varphi + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} \{ v_3(r, \beta, \varphi + \epsilon_3) \} \Delta \varphi r \Delta r \Delta \beta.
 \end{aligned}$$

$$\Delta V = r^2 \cos \beta \Delta r \Delta \beta \Delta \varphi \text{ dus}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial (v_2 \cos \beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \quad (7.9)$$

Voor de Laplace-operatie vinden we (met 7.8 en 7.9):

$$\begin{aligned}
 \Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\cos \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

Zonder bewijs vermelden we:

als in bolcoördinaten $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{v} = & \left(\frac{1}{r^2 \cos \beta} \left\{ \frac{\partial(rv_3 \cos \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial(rv_2)}{\partial \varphi} \right\}, \right. \\ & \left. \frac{1}{r \cos \beta} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_3 \cos \beta)}{\partial r} \right\}, \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(rv_2)}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial \beta} \right\} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Voorbeeld

Zij $\underline{v} = (z, -2x, y)$ een vectorveld, $\text{div } \underline{v} = 0$.

Ter illustratie bepalen we de componenten van $\underline{v}$ in het cilindercoördinatenstelsel en daarna $\text{div } \underline{v}$ met behulp van (7.4).

Transformatieformules: $\underline{x} = \underline{x}(r, \varphi, z)$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

We projecteren $\underline{v}$ op de eenheidsraakvectoren aan de coördinaatlijnen: de projecties zijn de gezochte componenten v_r, v_φ, v_z .

De raakvectoren zijn opvolgend:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) & ; & \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \right| = 1 \\ \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0); & \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| &= r \\ \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} &= (0, 0, 1) & ; & \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} \right| = 1. \end{aligned}$$

$\underline{v} = (z, -2r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ (dit is nog steeds in rechthoekige coördinaten).

$$v_r = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \right|} \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \right) = z \cos \varphi - 2r \sin \varphi \cos \varphi$$

$$v_\varphi = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right|} \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right) = -z \sin \varphi - 2r \cos^2 \varphi$$

$$v_z = r \sin \varphi \quad (\text{uiteraard niet veranderd})$$

dus in cilindercoördinaten:

$$\underline{v} = (z \cos \varphi - r \sin 2\varphi, -z \sin \varphi - r - r \cos 2\varphi, r \sin \varphi)$$

met (7.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} &= \frac{1}{r} (z \cos \varphi - 2r \sin 2\varphi) + \\ &+ \frac{1}{r} (-z \cos \varphi + 2r \sin \varphi) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Toepassing

Zoek alle functies U die 1° oplossing zijn van de Laplace-vergelijking $\Delta U = 0$ en
2° alleen afhangen van de afstand r tot O .

Dus $U = U(r)$ en uit (7.10) volgt dat $\Delta U = 0$ overgaat in

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \quad (*). \text{ We tonen } (*) \text{ nog anders aan.}$$

$U = U(r)$, dus de vlakken $U = \text{constant}$ zijn bollen om O , dus $\frac{dU}{dr}$ heeft de richting van r en is in grootte gelijk aan $\frac{dU}{dr}$.

Beschouw de bolschil tussen de bollen met straal r resp. $r + \Delta r$.

Flux door het omsluitend oppervlak is

$$\begin{aligned} &= 4\pi r^2 \frac{dU(r)}{dr} + 4\pi (r + \Delta r)^2 \frac{dU(r + \Delta r)}{dr} = \\ &= \frac{d}{dr} \{ 4\pi (r + \epsilon)^2 \frac{dU(r + \epsilon)}{dr} \} \Delta r. \end{aligned}$$

Volume = $4\pi r^2 \Delta r$, dus

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{flux}}{\Delta V} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right).$$

$$(*) \text{ geeft: } \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$\text{dus} \quad U = B - \frac{A}{r}. \quad (7.12)$$

(U is niet gedefinieerd in 0)

Toepassing

Zoek alle functies U die 1° oplossing zijn van $\Delta U = 0$ en
2° alleen afhangen van de afstand r tot de z-as.

Dus $U = U(r)$ en (7.5) geeft: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0$, waaruit als oplossing volgt:

$$U = A \log r + B. \quad (\text{logaritmische potentiaal}) \quad (7.13)$$

Opgave:

Bewijs met behulp van (7.9) dat in bolcoördinaten (r, θ, φ) , dus met poolhoek θ i.p.v. breedtehoek β als parameter:

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}$$

(7.14)

als $\underline{v}$ in dit stelsel de componenten (v_1, v_2, v_3) heeft.

8. Oplossing van de Laplace-vergelijking: enkelvoudige polen

De vergelijking van Laplace (in rechthoekige coördinaten) luidt:

$$\Delta \varphi(\underline{r}) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (8.1)$$

In dit en volgende punten behandelen we speciale oplossingen van (8.1).

Vooraf enkele opmerkingen.

. Zij S een oppervlak met randkromme K, P een punt, B het boloppervlak van de bol met straal a om P.

De kegel met top P en richtkromme K snijdt uit B een oppervlak met oppervlakte O.

Het quotiënt $\frac{O}{a^2}$ is onafhankelijk van a.

Definitie: de ruimtehoek waaronder we S zien vanuit P is gelijk aan $\frac{O}{a^2}$. (8.2)

Voorbeeld: Ligt P op S en S in een plat vlak, dan is deze ruimtehoek gelijk aan 2π .

Voorbeeld: Is S een boloppervlak met straal a, dan is een oppervlakte-element dσ te schrijven als $d\sigma = a^2 d\Omega$, waarbij dΩ de ruimtehoek is waaronder we dσ zien vanuit het middelpunt

$$\iint_S d\sigma = \iint a^2 d\Omega = a^2 \iint d\Omega = 4\pi a^2.$$

Is S een gesloten oppervlak en dΩ de ruimtehoek waaronder we een oppervlakte-element dσ zien vanuit een punt P, dan is

$$\iint d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{als P binnen S} \\ 0 & \text{als P buiten S.} \end{cases}$$

. Gebruikelijke fundamentele grootheden in de fysica zijn o.a. lengte, tijd, massa (fundamentele eenheden opvolgend meter, seconde, kilogram).

De dimensie van een grootheid geeft aan hoe deze afhangt van de fundamentele grootheden.

Symbolisch: [lengte] = L; [tijd] = T; [massa] = M;

dus [oppervlak] = L^2 ; [volume] = L^3 ; [snelheid] = LT^{-1} ;

[versnelling] = LT^{-2} ; [kracht] = MLT^{-2} ;

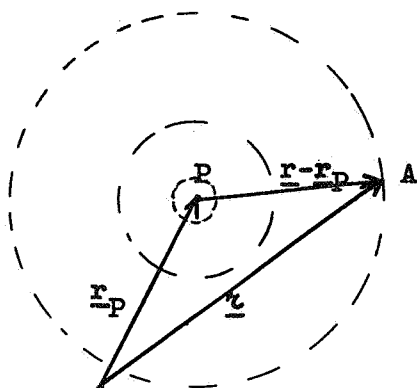
[ruimtehoek] = 1 (dimensieloos).

In gelijkheden dienen alle termen dezelfde dimensie te hebben (contrôle-middel).

Puntbelegging met een enkelvoudige pool

P en A zijn punten met plaatsvectoren $\underline{r}_P$ en $\underline{r}$ ($\underline{r}_P \neq \underline{r}$).

Plaatsing van een massa m in P heeft tot gevolg dat een in A geplaatste eenheid van massa een kracht ondervindt, gelijk aan



(gravitatiewet van Newton):

$$\underline{F}(\underline{r}) = - \frac{m}{|\underline{r}-\underline{r}_p|^3} (\underline{r}-\underline{r}_p) \quad (8.3)$$

($m > 0$: kracht naar P toe; in P een "put")

Plaatsing van een lading e in P heeft tot gevolg dat een in A geplaatste eenheid van positieve lading een kracht ondervindt, gelijk aan (wet van Coulomb):

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{e}{|\underline{r}-\underline{r}_p|^3} (\underline{r}-\underline{r}_p) \quad (8.4)$$

($e > 0$: kracht van P af: bron; $e < 0$: kracht naar P toe: put)

Is de ruimte gevuld met onsamendrukbare vloeistof en wordt in P continu $Q \text{ m}^3$ vloeistof per seconde erbij gepompt, dan is in A de stroomsnelheidsvector (zelf afleiden)

$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}_p|^3} (\underline{r}-\underline{r}_p) \quad (8.5)$$

($Q > 0$: in P een bron; $Q < 0$: in P een put.)

Dit zijn drie analoge verschijnselen (bronsterkte $Q \hat{=} + 4\pi e \hat{=} - 4\pi m$). P is het bronpunt, A het veldpunt. We werken verder met het eerste geval, waarbij we dus ook $m < 0$ toelaten ($m < 0$: bron; $m > 0$: put).

We weten reeds dat het vectorveld een potentiaal bezit en divergentievrij is:

$$\underline{F} = \text{grad } \varphi \quad \text{met } \varphi(\underline{r}) = \frac{m}{|\underline{r}-\underline{r}_p|} \quad (8.6)$$

$$\text{div } \underline{F} = 0. \quad (8.7)$$

$$\text{Dus } \Delta\varphi = 0 \text{ als } \underline{r} \neq \underline{r}_p. \quad (8.8)$$

Omgekeerd hebben we gezien: als $\varphi = \varphi(|\underline{r}-\underline{r}_p|)$ en $\Delta\varphi = 0$, dan

$$\varphi = C_1 + \frac{C_2}{|\underline{r}-\underline{r}_p|}.$$

Is P een variabel punt en m een functie van $\underline{r}_p$, dan zijn de formules ook juist.

Lijnbelegging met enkelvoudige polen

K is het stuk $s_1 \leq s \leq s_2$ van de ruimtekromme $\underline{r} = \underline{p}(s)$; s is de booglengteparameter. De lijn is belegd met massa: de massadichtheid is $\rho(s)$; ($[\rho] = ML^{-1}$).

De potentiaal van deze lijnbelegging is gelijk aan ($\rho(s)$ en $\underline{p}(s)$ nette functies)

$$\varphi(\underline{r}) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\rho(s)}{|\underline{r}-\underline{p}(s)|} ds; \quad \underline{r} \notin K \quad (8.9)$$

Immers: verdeel K in stukjes ter lengte Δs , neem in elk stukje een strooipunt P , dan is bij benadering de massa van zo'n stukje $\rho(s_p) \Delta s$ en de potentiaal in punt $\underline{r}$ (vgl. 8.6) gelijk aan

$$\frac{\rho(s_p) \Delta s}{|\underline{r}-\underline{r}_p|} = \frac{\rho(s_p) \Delta s}{|\underline{r}-\underline{p}(s_p)|}.$$

Verder gebruiken we, om te kunnen sommeren:

Bevinden zich in de punten P_1 en P_2 massa's m_1 en m_2 , dan is

$$\varphi = \frac{m_1}{|\underline{r}-\underline{r}_{p_1}|} + \frac{m_2}{|\underline{r}-\underline{r}_{p_2}|}.$$

In (8.9) heet $\underline{r}$ het veldpunt, $\underline{p}(s)$ het integratiepunt (in 8.6 was dit het bronpunt).

Voor de berekende potentiaal geldt:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Oppervlaktebelegging met enkelvoudige polen

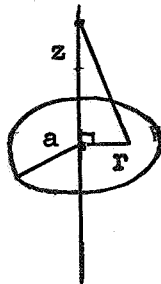
Zij S een oppervlak, P variabel op S , en $\mu(\underline{r}_p)$ de massadichtheid in P ($[\mu] = ML^{-2}$). De potentiaal van deze oppervlaktebelegging is gelijk aan (μ nette functie; S een net oppervlak):

$$\varphi(\underline{r}) = \iint_S \frac{\mu(\underline{r}_p) d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_p|} ; \quad \underline{r} \notin S \quad (8.10)$$

Voor φ geldt weer: $\Delta\varphi = 0$.

Bijzonder geval

Een cirkelschijf C (middelpunt M , straal $a \neq 0$) heeft een constante oppervlaktebelegging μ . Langs de as der cirkelschijf coördinaat z , $z_M = 0$.



De potentiaal in z is (P variabel op C)

$$\varphi(z) = \iint_C \frac{\mu d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_p|} = \mu \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\phi \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

dus

$$\varphi(z) = 2\pi\mu (\sqrt{z^2 + a^2} - |z|). \quad (8.11)$$

$$\text{Veldsterkte } F(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\pi\mu \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{|z|}{z} \right). \quad (8.12)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0; \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = 0; \quad \varphi(z) \sim \frac{\pi\mu a^2}{z} \quad \text{als } z \rightarrow \infty.$$

($\pi\mu a^2$ = totale belegging, dus een potentiaal alsof alle belegging in M geconcentreerd was)

$$\varphi \text{ is continu in } z = 0: \quad \varphi(0) = 2\pi\mu a. \quad (8.13)$$

$$F \text{ is discontinu in } z = 0: \quad F^+ = \lim_{z \downarrow 0} F(z) = -2\pi\mu$$

$$F^- = \lim_{z \uparrow 0} F(z) = 2\pi\mu$$

$$\text{dus sprong} = F^+ - F^- = -4\pi\mu = \text{bronsterkte in } M. \quad (8.14)$$

$$\text{of:} \quad \mu = - \frac{\text{sprong van de normale afgeleide}}{4\pi}.$$

Zij S een willekeurig oppervlak met belegging μ , P een variabel punt op S , $\underline{n}_P$ de normaalvector in P en $A(\underline{r})$ een punt op de normaal. Volgens (8.10) is

$$\varphi_A = \varphi(\underline{r}) = \iint_S \frac{\mu(\underline{r}_P) d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_P|}.$$

Voor $A = P$ hebben we een oneigenlijke integraal. We snijden uit S een cirkelvormig gat C met middelpunt P en straal δ .

$$\varphi_A = \iint_{S-C} \frac{\mu d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_P|} + \iint_C \frac{\mu d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_P|}$$

De eerste potentiaal en de afgeleiden zijn voor elke A op de normaal continu. Voor de tweede potentiaal onderstellen we: C is een cirkelschijf en op C is μ constant $= \mu(\underline{r}_P)$. Voor de tweede potentiaal geldt dan (8.13) en (8.14) en dit geldt dus ook voor φ_A :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A^+ &= \varphi_A^- \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)^+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)^- &= -4\pi\mu = \text{bronsterkte in } P. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Voorbeeld van een randwaardeprobleem.

D is een gebied in het x - y -vlak.

We zoeken oplossingen van $\Delta\varphi = 0$ onder de voorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, 0) &= 0 \quad \text{als } (x, y) \notin D \\ \bullet \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, 0^+) &= W(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, 0^-) &= -W(x, y) \end{aligned} \right\} &\text{als } (x, y) \in D \\ \bullet \quad \lim_{|\underline{r}| \rightarrow \infty} \varphi(\underline{r}) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Het probleem is op te vatten als een belegging van D met eenvoudige polen. De sprong der normale afgeleide is $2W(x, y)$ als $(x, y) \in D$. Vergelijking met (8.10) en (8.15) doet ons als oplossing proberen: ($W = -2\pi\mu$)

$$\varphi(\underline{r}) = \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{W(\underline{r}_P) d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_P|} \quad (P \text{ variabel op } D).$$

Dan is in ieder geval $\Delta\varphi = 0$, $(\frac{\partial\varphi}{\partial z})^+ = W$, $(\frac{\partial\varphi}{\partial z})^- = -W$.

Ook is $\lim_{|\underline{r}| \rightarrow \infty} \varphi(\underline{r}) = 0$.

Uit
$$\varphi = - \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{W \, d\sigma}{\sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}}$$

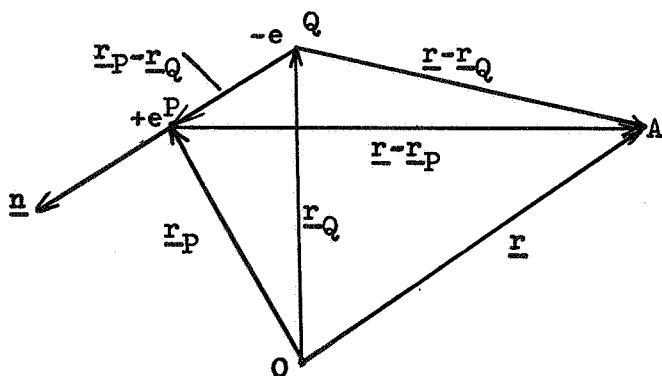
volgt tenslotte nog $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,0) = 0$ als $(x,y) \notin D$.

Over de eenduidigheid der oplossing spreken we later.

9. De dipool

In P en Q bevinden zich een bron en een put van gelijke sterkte bv. ladingen $+e$ en $-e$ of massa's $-m$ en $+m$.
De potentiaal van deze belegging is

$$\phi(\underline{r}) = \frac{-e}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} + \frac{e}{|\underline{r}-\underline{r}_Q|}$$



$$\lim_{P \rightarrow Q} \phi(\underline{r}) = 0.$$

Stel $\underline{r}_P - \underline{r}_Q = \delta \underline{n}$ met $|\underline{n}| = 1$,
dus δ = afstand PQ.

We maken nu e variabel zodanig
dat $e = \frac{E}{\delta}$ met E constant.

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \frac{E}{\delta} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P+\delta \underline{n}|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} \right\} \\ &= \frac{E}{\delta} (f(\underline{r}+\delta \underline{n}) - f(\underline{r})) \end{aligned}$$

dus (zie 3.1).

$$\varphi(\underline{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi(\underline{r}) = E \left(\frac{df}{d\delta} \right)_{\delta=0} = E \frac{\partial f}{\partial \underline{n}}.$$

Dus, als α de hoek is tussen $\underline{n}$ en $(\underline{r}-\underline{r}_P)$

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}) &= E \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} \right) = E \underline{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} = \\ &= - E \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^3} = - E \frac{\cos \alpha}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^2}.\end{aligned}\quad (9.1)$$

Ook is (P variabel)

$$\varphi(\underline{r}) = - E \frac{\partial}{\partial \underline{n}_P} \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} \right) = - E \underline{n}_P \cdot \text{grad}_P \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|}.\quad (9.2)$$

Definitie: $\varphi(\underline{r})$ is de potentiaal van de dipool in $\underline{r}_P$ met sterkte E en asrichting $\underline{n}$.
De vector $\underline{E}$ met de richting van $\underline{n}$ en en grootte E heet het dipoolmoment. (9.3)

Bewijs zelf:

$\varphi(\underline{r})$ is een oplossing van $\Delta\varphi = 0$ en ook van $\Delta_P\varphi = 0$.

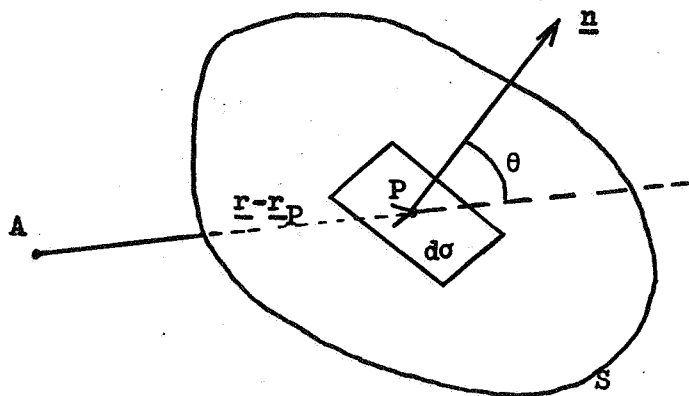
Oppervlaktebelegging met dipolen (dubbellaag)

We veronderstellen een oppervlak S zo belegd met dipolen dat in elk punt P van S de dipoolas loodrecht op S is en dat ten opzichte van S alle bronnen aan dezelfde kant liggen. De dipoolsterkte zij $\mu(\underline{r}_P)$.

De potentiaal van deze belegging in veldpunt A (voerstraal $\underline{r}$) is gelijk aan (zie 9.2)

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}) &= - \iint_S \mu(\underline{r}_P) \, d\sigma \frac{\partial}{\partial \underline{n}_P} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} \\ &= - \iint_S \mu(\underline{r}_P) \frac{\underline{n}_P \cdot (\underline{r}-\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^3} \, d\sigma \\ &= (\theta \text{ is de hoek tussen } \underline{n} \text{ en } \underline{r}_P-\underline{r}) \\ &= \iint_S \frac{\mu(\underline{r}_P) \cos \theta}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^2} \, d\sigma.\end{aligned}\quad (9.4)$$

φ voldoet aan $\Delta\varphi = 0$.



$\frac{\cos \theta \, d\sigma}{|\underline{r} - \underline{r}_P|^2}$ is gelijk aan de ruimtehoek waaronder we $d\sigma$ zien vanuit A.

Dus

$$\varphi = \iint_S \mu(\underline{r}_P) \, d\Omega. \quad (9.5)$$

Bij constante μ is dus

$$\varphi = \mu \iint_S d\Omega = \mu \Omega \quad (9.6)$$

Ω is de ruimtehoek waaronder we S zien vanuit A.

$\Omega > 0$ als $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ (A aan de kant der "putten")

$\Omega < 0$ als $\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi$ (A aan de kant der "bronnen").

$$\varphi^- = \lim_{\substack{|\underline{r} - \underline{r}_P| \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi}} \varphi(\underline{r}) = \mu \Omega_1$$

$$\varphi^+ = \lim_{\substack{|\underline{r} - \underline{r}_P| \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi}} \varphi(\underline{r}) = -\mu (4\pi - \Omega_1)$$

$$\text{Dus } \varphi^+ - \varphi^- = -4\pi\mu. \quad (9.7)$$

Zonder bewijs:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\right)^- \quad (9.8)$$

Opmerking 1

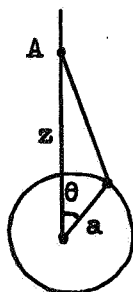
Vergelijk dit met (8.15), maar bedenk dat in (8.15) φ de gravitatie-potentiaal is, terwijl hierboven φ een elektrische potentiaal is. (In (8.15) is μ de massadichtheid, hierboven is μ de ladingsdichtheid.)

Opmerking 2

Hierboven is niet nagegaan onder welke voorwaarden een en ander geldig is.

Voorbeeld

Een boloppervlak B (straal a) is belegd met enkelvoudige polen, bv. massapolen, met constante oppervlakedichtheid ρ . Het veld is sferisch symmetrisch, de potentiaal φ zal alleen een functie zijn van de afstand r tot het middelpunt. Neem het middelpunt als oorsprong, het veldpunt A op de z -as ($z \geq 0$) en maak gebruik van bolcoördinaten (r, θ, φ) .



De massa van een oppervlakte-element is $\rho a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, en de afstand van A tot dit massa-element:

$$\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}.$$

Dus (zie 8.6)

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}} \\ &= \frac{2\pi \rho a}{z} (|a+z| - |a-z|). \end{aligned}$$

In verband met de symmetrie vinden we dan ($|\underline{r}| = r$):

$$\varphi(\underline{r}) = \varphi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi \rho a^2}{r} = \frac{\text{totale massa}}{r} & \text{als } r > a \\ 4\pi \rho a = \text{constant} & \text{als } r < a \end{cases} \quad (9.9)$$

Hieruit volgt in het bolcoördinatenstelsel; (7.8)

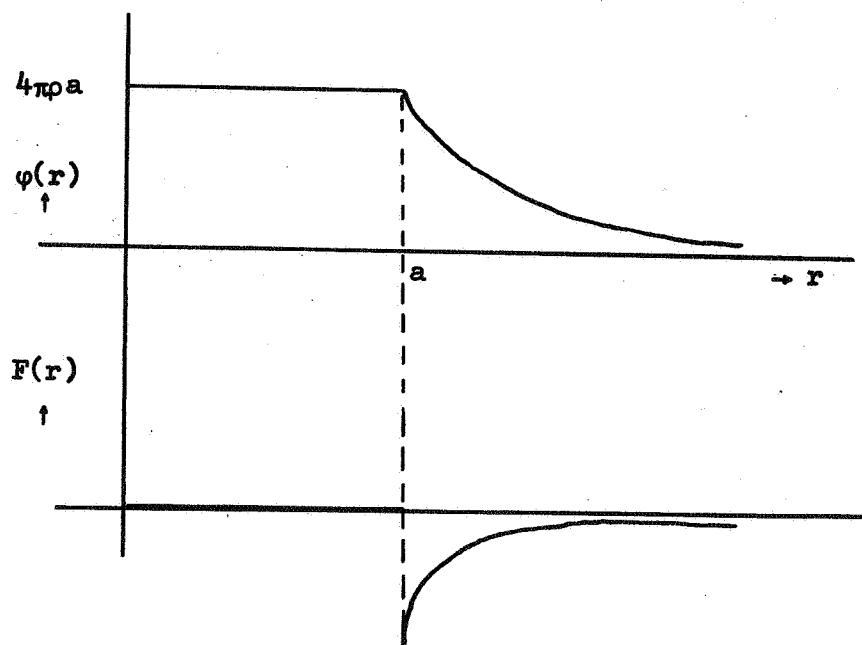
$$\underline{F}(\underline{r}) = \text{grad } \varphi = \begin{cases} \left(-\frac{4\pi \rho a^2}{r^2}, 0, 0 \right) & \text{als } r > a \\ \underline{0} & \text{als } r < a \end{cases} \quad (9.10)$$

Verder is

$$\varphi^+ = \varphi^- = 4\pi\rho a$$

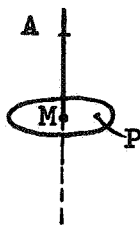
$$\underline{F}^+ = (-4\pi\rho, 0, 0); \underline{F}^- = \underline{0}$$

in overeenstemming met (8.15)



Voorbeeld

Een cirkelschijf C (middelpunt M, straal a) is belegd met dipolen, bv. elektrische dipolen, met constante sterkte μ . Langs de as van C coördinaat z, in richting overeenstemmend met de dipoolassen. $z_M = 0$. A is een punt op de z-as, P een punt in C.



$$A = (0, 0, z); P = (x_P, y_P, 0).$$

Volgens (9.4) is dan

$$\varphi_A = \varphi(z) = - \iint_C \mu(\underline{r}_P) \frac{\underline{n}_P \cdot (\underline{r} - \underline{r}_P)}{|\underline{r} - \underline{r}_P|^3} d\sigma$$

$$= - \mu z \iint_C \frac{d\sigma}{(z^2 + x_P^2 + y_P^2)^{3/2}}$$

= (poolcoördinaten)

$$\begin{aligned}
 &= -\mu z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{r \, dr \, d\varphi}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\
 &= 2\pi\mu \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{z}{|z|} \right) \quad (9.11)
 \end{aligned}$$

Vergelijking met (8.12), waar μ de sterkte van een enkelvoudige massa-belegging is, geeft voor een punt op de as der cirkelschijf: de potentiaal bij de dipoolbelegging is het tegengestelde van de veldsterkte bij een enkelvoudige belegging van de cirkelschijf.

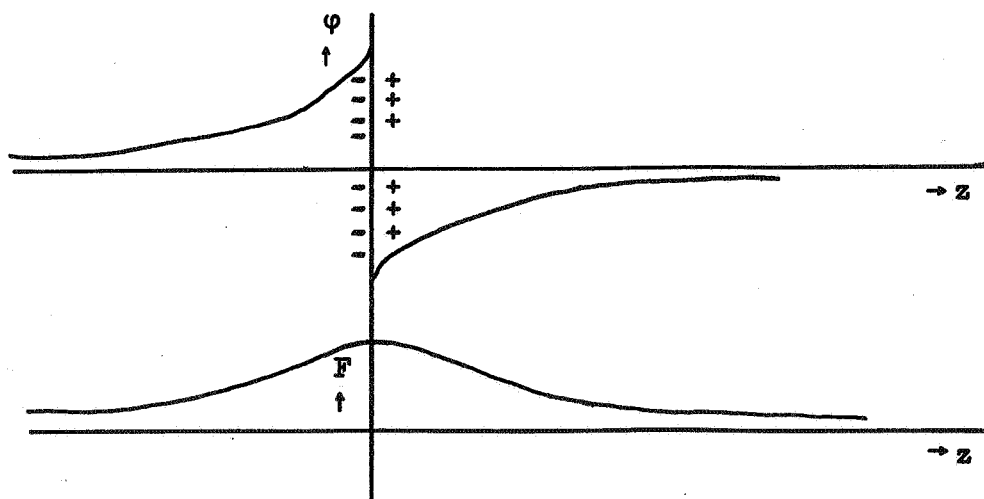
$$\varphi^+ = -2\pi\mu, \quad \varphi^- = +2\pi\mu$$

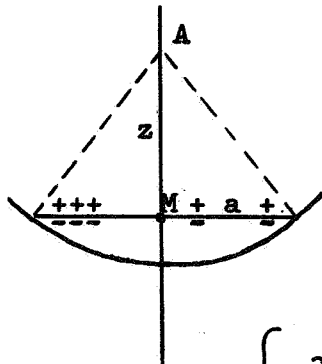
dus

$$\varphi^+ - \varphi^- = -4\pi\mu = -\text{bronsterkte}. \quad (9.12)$$

Voor de veldsterkte vinden we:

$$F(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2\pi\mu a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (9.13)$$



Opmerking

Berekening met behulp van (9.6) als volgt.

Oppervlakte bolsegment = $2\pi \times \text{straal} \times \text{segment-hoogte}$
 $= 2\pi \sqrt{z^2 + a^2} (\sqrt{z^2 + a^2} - z).$

Straal der bol = $\sqrt{z^2 + a^2}$

dus ($\varphi = \mu\Omega$).

$$\varphi = \begin{cases} -2\pi\mu \frac{\sqrt{z^2 + a^2} - z}{\sqrt{z^2 + a^2}} & \text{aan de bronkant} \\ 2\pi\mu \frac{\sqrt{z^2 + a^2} + z}{\sqrt{z^2 + a^2}} & \text{aan de putkant} \end{cases}$$

10. Volumebelegging

Een gebied G in de ruimte is belegd met massa. Volumedichtheid ρ . De gravitatiepotentiaal is (zie 8.6)

$$\varphi(\underline{r}) = \iiint_G \frac{\rho(\underline{r}_p)}{|\underline{r} - \underline{r}_p|} d\tau \quad (10.1)$$

Voorbeeld

G is een bol met straal a , ρ is constant.

We berekenen φ eerst zonder hulp van (10.1). Het veldpunt nemen we op de z -as ($z \geq 0$). De bol vatten we op als een superpositie van schillen. De oppervlakedichtheid op een schil met straal $r = \frac{\rho dr d\sigma}{d\sigma} = \rho dr$. We vinden (zie 9.9)

$$z > a: \quad \varphi = \frac{\text{totale massa}}{z} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho a^3}{z}$$

$$z < a: \quad \varphi = \varphi(r < z) + \varphi(\text{ten gevolge van de schillen met } r: z < r < a)$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi\rho z^3}{z} + \int_z^a 4\pi r \rho dr$$

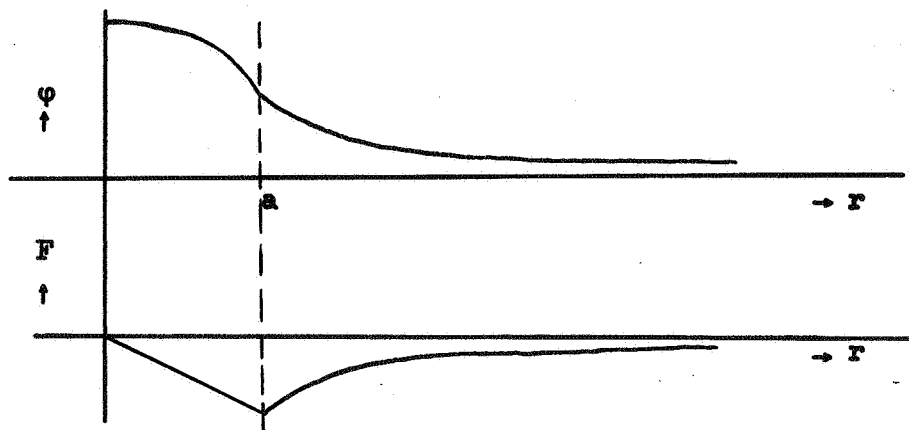
$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} \pi \rho z^2 + 2\pi\rho(a^2 - z^2) \\
 &= 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{1}{3} z^2\right).
 \end{aligned}$$

Dus (veldpunt nu willekeurig; $r = |\underline{r}|$).

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho a^3}{3r} & \text{als } r > a \\ 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2\right) & \text{als } r < a \end{cases} \quad (10.2)$$

$$F(r) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{4\pi\rho a^3}{3r^2} & \text{als } r > a \\ -\frac{4}{3}\pi\rho r & \text{als } r < a \end{cases} \quad (10.3)$$

φ en F zijn continu in $r = a$.



Wat hier anders is dan bij de lijn- en oppervlaktebeleggingen is de waarde van $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 & \text{als } r > a \\ -4\pi\rho & \text{als } r < a \end{cases} \quad (10.4)$$

Immers

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \underline{F} = (7.10) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{4}{3} \pi \rho a^3 \right) & \text{als } r > a \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{4}{3} \pi \rho r^3 \right) & \text{als } r < a. \end{cases}$$

[Ook als volgt te zien:

$$\text{flux} = \frac{1}{4\pi r^2 dr} \left\{ + 4\pi r^2 \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r - 4\pi (r+dr)^2 \frac{4}{3} \pi \rho (r+dr) \right\}$$

$$= -\frac{4}{3} \pi \rho \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = -4 \pi \rho]$$

De vergelijking

$$\Delta\varphi(\underline{r}) = -4 \pi \rho = \text{bronsterkte} \quad (10.5)$$

is de vergelijking van Poisson. (ρ is hier de volumedichtheid der massa)

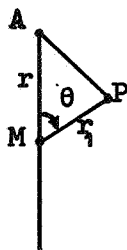
We kennen dus een oplossing van (10.5) als

$$\rho = \begin{cases} \text{constant} & \text{binnen een bol} \\ 0 & \text{buiten een bol} \end{cases}$$

Zie namelijk (10.2).

Berekening van (10.2) volgens (10.1):

Voer bolcoördinaten r_1, θ, ϕ in met het middelpunt M der bol als oorsprong en met de poolas door het veldpunt A (geen beperking: het veld is bolsymmetrisch). P is het integratiepunt.



$$AP = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}$$

$$\Delta V = r_1^2 \sin \theta \Delta r_1 \Delta \theta \Delta \phi$$

$$\varphi_A = \iiint_{\text{bol}} \frac{\rho(\underline{r}_P) d\tau}{|\underline{r} - \underline{r}_P|} = \rho \int_{r_1=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r_1^2 \sin \theta dr_1 d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \pi \rho \int_0^a r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}} \\
&= \frac{2\pi\rho}{r} \int_0^a r_1 (|r+r_1| - |r-r_1|) dr_1 \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi\rho a^3}{3r} & \text{als } r > a \\ 2\pi\rho(a^2 - \frac{1}{3}r^2) & \text{als } r < a \end{cases}
\end{aligned}$$

We beschouwen nu een willekeurig gesloten gebied G met volumebelegging ρ (massadichtheid).

De potentiaal in een punt $\underline{r} \notin G$ is dan (10.1)

$$\varphi(\underline{r}) = \iiint_G \frac{\rho(\underline{r}_p) d\tau}{|\underline{r}-\underline{r}_p|} \quad (\underline{r}_p \text{ is het integratiepunt})$$

Door bolcoördinaten r_1, θ, ϕ (met veldpunt $\underline{r} = (x, y, z)$ als middelpunt) in te voeren, krijgen we voor $\varphi(\underline{r})$ de uitdrukking:

$$\varphi(\underline{r}) = \iiint_G \frac{\rho(x+r_1 \sin \theta \cos \phi, y+r_1 \sin \theta \sin \phi, z+r_1 \cos \theta) r_1^2 \sin \theta dr_1 d\theta d\phi}{r_1}$$

Hieruit blijkt dat de integraal bestaat als $\underline{r} \in G$: de waarde noemen we de potentiaal in $\underline{r}$.

Indien het veldpunt $\underline{r}$ niet in G ligt, is $\Delta\varphi = 0$. Voor het geval $\underline{r} \in G$ schrijven we $\varphi(\underline{r})$ als de som

$$\iiint_{G-B} \frac{\rho(\underline{r}_p) d\tau}{|\underline{r}-\underline{r}_p|} + \iiint_B \frac{\rho(\underline{r}_p) d\tau}{|\underline{r}-\underline{r}_p|} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 + \varphi_2,$$

waarbij B een bolvormig gebied met straal ϵ om het veldpunt $\underline{r}$ is. De eerste integraal (φ_1 genoemd) bevat geen singulariteit: $\Delta\varphi_1 = 0$. De tweede integraal (φ_2 genoemd) benaderen we door in B de belegging ρ constant te nemen en wel gelijk aan $\rho(\underline{r})$. Volgens (10.4) is dan $\Delta\varphi_2 = -4\pi\rho(\underline{r})$.

De gemaakte fout verdwijnt als we de limiet nemen voor $\varepsilon \rightarrow 0$, en als ρ aan bepaalde gladheidsvoorwaarden voldoet.

Dus als $\underline{r} \in G$, dan $\Delta\varphi = \Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho(\underline{r})$.

Dit is ook juist als $\underline{r} \notin G$, omdat dan $\rho(\underline{r}) = 0$. Voor alle $\underline{r}$ is dus

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\underline{r}) &= -4\pi\rho(\underline{r}) \\ &= \text{bronsterkte in het veldpunt.}\end{aligned}\quad (10.4)$$

(10.4) is de vergelijking van Poisson.

Een oplossing van deze vergelijking kennen we dus:

$$\varphi(\underline{r}) = \iiint \frac{\rho(\underline{r}_p) d\tau}{|\underline{r} - \underline{r}_p|};$$

met φ is ook $\varphi + \psi$ oplossing, als ψ een willekeurige oplossing is van $\Delta\psi = 0$.

Resumé

Uitgaande van het veld met potentiaal $\varphi = \frac{m}{r}$, hebben we speciale oplossingen gevonden van de vergelijking van Laplace: $\Delta\varphi(\underline{r}) = 0$ en van de vergelijking van Poisson: $\Delta\varphi(\underline{r}) = Q(\underline{r})$.

(De vergelijking $\Delta\varphi = 0$ is het standaardtype van de zogenaamde elliptische differentiaalvergelijkingen)

Hieronder sommen we de verschillende gevallen nog eens op. Daarbij is e de lading in een punt, μ de ladingsdichtheid (op lijn, oppervlakte of gebied), $\underline{r}_p$ het integratiepunt en $\underline{r}$ het veldpunt.

(Voor gravitatiepotentialen vervang e en μ door $-m$ resp. $-\rho$). In alle gevallen is de veldsterkte gelijk aan $\underline{F} = \text{grad } \varphi$.

Enkelvoudige polen

Puntbelegging in P:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{-e}{|\underline{r} - \underline{r}_p|}, \quad \underline{r} \neq \underline{r}_p.$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \neq \underline{r}_p.$$

Belegging van een kromme K:

$$\varphi(\underline{r}) = \int_K \frac{-\mu(\underline{r}_p)}{|\underline{r} - \underline{r}_p|} ds, \quad \underline{r} \notin K.$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \notin K.$$

Belegging van een oppervlak S:

$$\varphi(\underline{r}) = \iint_S \frac{-\mu(\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} d\sigma, \quad \underline{r} \notin S.$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \notin S.$$

$$\varphi^+ = \varphi^-.$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}_P}\right)^+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}_P}\right)^- = 4\pi\mu(\underline{r}_P).$$

Belegging van een gebied G:

$$\varphi(\underline{r}) = \iiint_G \frac{-\mu(\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} d\tau$$

$$\Delta\varphi = 4\pi\mu(\underline{r})$$

$$\text{dus } \Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \notin G.$$

Dipolen; sterkte E, asrichting n.

Puntbelegging in P:
$$\varphi(\underline{r}) = -E \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^3} = E \frac{\partial}{\partial\underline{n}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|} =$$

$$= -E \frac{\partial}{\partial\underline{n}_P} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_P|}, \quad \underline{r} \neq \underline{r}_P.$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \neq \underline{r}_P.$$

Oppervlaktebelegging:
$$\varphi(\underline{r}) = -\iint_S E(\underline{r}_P) \frac{\underline{n}_P \cdot (\underline{r}-\underline{r}_P)}{|\underline{r}-\underline{r}_P|^3} d\sigma, \quad \underline{r} \notin S.$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{als } \underline{r} \notin S.$$

$$\varphi^+ - \varphi^- = -4\pi E(\underline{r}_P).$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}_P}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}_P}\right)^-.$$

11. Stellingen van Green

In het nu volgende is G een gesloten gebied in de ruimte met randoppervlak S en zijn φ en ϕ gegeven functies op G , die daar tweemaal differentieerbaar zijn. $\underline{n}$ is de t.o.v. G naar buiten gerichte normaal in een punt van S . Wanneer verondersteld wordt dat φ (of ϕ) een harmonische functie is (d.w.z. φ voldoet aan $\Delta\varphi = 0$) wordt dit steeds vermeld.

Het divergentietheorema (4.6) luidt

$$\iiint_G \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\sigma.$$

Substitutie hierin van $\underline{v} = \operatorname{grad} \varphi$ geeft (zie ook 3.3) de eerste stelling van Green:

$$\iiint_G \Delta\varphi \, d\tau = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} \, d\sigma \quad (11.1)$$

Hieruit volgt:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ in } G \Rightarrow \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} \, d\sigma = 0. \quad (11.2)$$

Substitutie van $\underline{v} = \phi \operatorname{grad} \varphi$ in (4.6) geeft (zie ook 4.12):

$$\iiint_G (\phi \Delta\varphi + \nabla\phi \cdot \nabla\varphi) \, d\tau = \iint_S \phi \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} \, d\sigma \quad (11.3)$$

Verwisseling van φ en ϕ en aftrekken geeft de tweede stelling van Green:

$$\iiint_G (\phi \Delta\varphi - \varphi \Delta\phi) \, d\tau = \iint_S \left(\phi \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial\phi}{\partial \underline{n}} \right) \, d\sigma \quad (11.4)$$

dus

$$\Delta\varphi = 0 \text{ en } \Delta\phi = 0 \text{ in } G \Rightarrow \iint_S \phi \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} \, d\sigma = \iint_S \varphi \frac{\partial\phi}{\partial \underline{n}} \, d\sigma \quad (11.5)$$

Zij Q een punt buiten G met plaatsvector $\underline{q}$, $\underline{r}$ een variabel punt in G en $r_Q = |\underline{r} - \underline{q}|$; voor de functie $\phi = \frac{1}{r_Q}$ geldt in G : $\Delta\phi = 0$.

We substitueren deze ϕ in (11.4):

$$\Delta\phi = 0 \text{ in } G \Rightarrow \iint_S \left(\frac{1}{r_Q} \frac{\partial}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{r_Q} \right) \right) d\sigma = 0 \quad (11.6)$$

voor elk punt $Q \notin G$.

Hieruit volgt onder meer dat op $\overbrace{S}^{\text{de functies}} \phi$ en $\frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}}$ niet willekeurig voor te schrijven zijn. (Door ϕ op S te geven zijn de tangentiële afgeleiden van ϕ uiteraard wel bepaald.)

[Analogie met het 1-dimensionale geval: gegeven is voor een functie $f(x)$ een gewone tweede-orde differentiaalvergelijking op segment $[a,b]$ en bovendien de functiewaarden $f(a)$ en $f(b)$. $f'(a)$ en $f'(b)$ zijn nu niet meer vrij te kiezen. We hebben hier met een randwaardeprobleem te maken, niet met een beginwaardeprobleem waar f en f' in een punt gegeven zijn.]

Zij nu P een punt van G met plaatsvector $\underline{p}$, $\underline{r}$ variabel in G ,
 $r_P = |\underline{r} - \underline{p}|$, $\phi = \frac{1}{r_P}$. ϕ en $\Delta\phi$ bestaan niet in p .

Zij B een bol met straal δ om P met rand S' . (11.6) geeft:

$$\Delta\phi = 0 \text{ in } G \Rightarrow \iint_S \left(\frac{1}{r_P} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \frac{1}{r_P} \right) d\sigma +$$

$$\iint_{S'} \left(\frac{1}{r_P} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \frac{1}{r_P} \right) d\sigma = 0$$

($\underline{n}$ t.o.v. $G-B$ naar buiten)

Voor $\underline{r} \in S'$ is $r_P = \delta$, $\underline{n}$ tegengesteld gericht aan $\underline{r} - \underline{p}$, dus

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \frac{1}{r_P} = + \frac{1}{r_P^2} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Dus

$$\iint_{S'} \left(\frac{1}{r_P} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \frac{1}{r_P} \right) d\sigma = \iint_{S'} \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{1}{\delta^2} \right) \delta^2 d\Omega$$

$$= \delta \iint_{S'} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} d\Omega - \iint_{S'} \phi d\Omega.$$

φ is harmonisch in G (ook in $\underline{p}$), dus $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$ is eindig op S' zodat de eerste integraal eindig is. Volgens de middelwaardestelling is

$$\iint_{S'} \varphi \, d\Omega = 4\pi\varphi(\underline{s}), \text{ waarbij } \underline{s} \text{ een punt van } S' \text{ is.}$$

Hieruit volgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S'} \left(\frac{1}{r_P} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \frac{1}{r_P} \right) d\sigma = -4\pi\varphi(\underline{p})$$

zodat

$$4\pi\varphi(\underline{p}) = \iint_S \left(\frac{1}{r_P} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{r_P} \right) \right) d\sigma \quad (11.7)$$

waarbij $r_P = |\underline{r} - \underline{p}|$.

(representatiestelling der potentiaaltheorie)

We merken op:

1° Als $\Delta\varphi = 0$ in G , is φ in G bepaald wanneer φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$ op de rand van G gegeven zijn. We weten al dat in dit geval φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$ niet vrij te kiezen zijn op S . Hieronder (randwaardeproblemen) gaan we hier nader op in.

2° $\iint_S \frac{1}{r_P} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\sigma$ is de potentiaal in P ten gevolge van een enkelvoudige (ladings-) belegging van S met dichtheid $-\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$.

$-\iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{r_P} \right) d\sigma$ is de potentiaal in P ten gevolge van een

dipoolbelegging van S met sterkte φ en asrichting $\underline{n}$.

Dus elke oplossing van $\Delta\varphi = 0$ is te schrijven als de som van de potentiaal van een enkelvoudige belegging en de potentiaal van een dubbellaag.

Voor we de randwaardeproblemen van Dirichlet en Neumann bespreken, substitueren we $\psi = \varphi$ in (11.3):

$$\iiint_G (\varphi \Delta\varphi + |\text{grad } \varphi|^2) d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\sigma. \quad (11.8)$$

$f(\underline{r})$, $\underline{r} \in S$ en $g(\underline{r})$, $\underline{r} \in S$ zijn op S gegeven functies.

Het eerste randwaardeprobleem (Dirichlet):

zoek de functies φ zodanig dat $\Delta\varphi = 0$ op G en $\varphi = f$ op S .

We tonen aan dat φ éénduidig bepaald is. Veronderstel dat φ_1 en φ_2 oplossingen zijn. Voor $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ geldt: $\Delta\varphi = 0$ op G en $\varphi = 0$ op S .

Uit (11.8) volgt dan $\iiint_G |\text{grad } \varphi|^2 d\tau = 0$ dus $\text{grad } \varphi = \underline{0}$ op G .

(op geïsoleerde punten na), dus $\varphi = \text{constant}$ op G . Maar $\varphi = 0$ op S , dus $\varphi = 0$ op G , zodat $\varphi_1 = \varphi_2$.

Er is dus hoogstens één oplossing.

Op de existentie gaan we nu niet in.

Opmerking: Door φ op S te geven, ligt $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}$ vast.

Het tweede randwaardeprobleem (Neumann)

Zoek de functies φ zodanig dat $\Delta\varphi = 0$ op G en $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} = g$ op S .

Stel φ_1 en φ_2 zijn oplossingen. Voor $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ geldt $\Delta\varphi = 0$

op G en $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} = 0$ op S . Uit (11.8) volgt dan weer $\varphi = \text{constant}$ op G ,

dus $\varphi_1 = \varphi_2 + c$.

Twee oplossingen verschillen dus hoogstens een constante.

(De voorwaarden $\Delta\varphi = 0$ en $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} = g$ laten deze mogelijkheid toe.)

Opmerking: Door φ op S te geven, ligt $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}}$ vast.

Beschouw de integraal uit (11.6) en (11.7) als functie van $\underline{p}$

$$\begin{aligned} I(\underline{p}) &= \iint_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{n}} \frac{1}{r_p} - \varphi \frac{\partial}{\partial\underline{n}} \left(\frac{1}{r_p} \right) \right) d\sigma \\ &= \begin{cases} 4\pi\varphi(\underline{p}) & \text{als } \underline{p} \in G \\ 0 & \text{als } \underline{p} \notin G. \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbij is $r_p = |\underline{r} - \underline{p}|$.

$$\text{Zij } \underline{s} \in S, I^+(\underline{s}) = \lim_{\substack{\underline{p} \rightarrow \underline{s} \\ \underline{p} \notin G}} I(\underline{p}), I^-(\underline{s}) = \lim_{\substack{\underline{p} \rightarrow \underline{s} \\ \underline{p} \in G}} I(\underline{p})$$

dan is

$$I^+(\underline{s}) - I^-(\underline{s}) = -4\pi\varphi(\underline{p}).$$

Deze sprong is afkomstig van de dipoolpotentialiaal

$$-\iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{r_p} \right) d\sigma \quad (\text{vgl. 9.7 en 2° opm. bij 11.7})$$

Verder geldt:

$$\frac{\partial I}{\partial \underline{n}} = \begin{cases} 4\pi \frac{\partial \varphi(\underline{p})}{\partial \underline{n}} & \text{als } \underline{p} \in G \\ 0 & \text{als } \underline{p} \notin G \end{cases}$$

$$\text{dus} \quad \left(\frac{\partial I}{\partial \underline{n}} \right)^+ - \left(\frac{\partial I}{\partial \underline{n}} \right)^- = -4\pi \frac{\partial \varphi(\underline{p})}{\partial \underline{n}}$$

(vergelijk 8.15 en 2° opm. bij 11.7)

We passen (11.7) toe op het geval dat S een boloppervlak is met middelpunt M, straal R.

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi_M &= \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \cdot \frac{1}{R} + \varphi \cdot \frac{1}{R^2} \right) R^2 d\Omega \\ &= R \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\Omega + \iint_S \varphi d\Omega. \end{aligned}$$

$$\text{Als } \Delta\varphi = 0 \text{ binnen } S, \text{ is } \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\Omega = \frac{1}{R^2} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\sigma = 0 \quad (\text{zie 11.2})$$

Dus

als $\Delta\varphi = 0$ binnen een boloppervlak S, dan is

$$\varphi(\text{middelpunt}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi d\Omega \quad (11.9)$$

Opmerking 1: zonder bewijs:

als voor elke bol binnen een gebied G (11.9) geldt,
is $\Delta\varphi = 0$ in G.

Opmerking 2:

Als we de differentiaalvergelijking

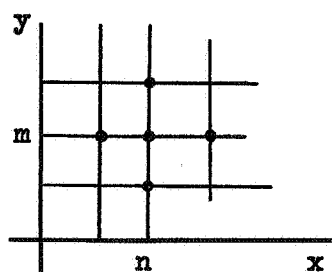
$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

benaderen door de differentievergelijking

$$\varphi_{n+1,m} - 2\varphi_{n,m} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n,m+1} - 2\varphi_{n,m} + \varphi_{n,m-1} = 0$$

vinden we

$$\varphi_{n,m} = \frac{1}{4} (\varphi_{n+1,m} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n,m-1} + \varphi_{n,m+1})$$



Opmerking 3:

Zij G een gesloten gebied met randoppervlak S , φ een harmonische functie binnen en op S en $\underline{r}$ een inwendig punt van G .

Voor elke bol om $\underline{r}$ die geheel binnen S ligt, geldt

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{bolopp.}} \varphi d\Omega = \text{gemiddelde waarde van } \varphi \text{ over boloppervlak.}$$

$\varphi(\underline{r})$ kan dus niet de maximumwaarde van φ zijn, tenzij φ constant in een omgeving van $\underline{r}$. Dit geldt voor elk inwendig punt $\underline{r}$ van G .

Analoog voor het minimum van φ .

Dus: de extreme waarden van een op een gesloten gebied G harmonische functie worden op de rand van G aangenomen. (11.10)
(vergelijk het maximum-modulus principe uit de functietheorie)

Hieruit volgt weer de eenduidigheid van de oplossing van het probleem van Dirichlet: uit $\varphi = 0$ op S volgt

$$\varphi_{\max} = \varphi_{\min} = 0 \text{ dus } \varphi = 0 \text{ op } G.$$

Opgave: G is een gesloten gebied met rand S , $p \in G$, $\underline{r}$ variabel $\in G$,

$$r_p = |\underline{r} - \underline{p}|, \quad \phi = \frac{1}{r_p}.$$

Op G is een functie φ gedefinieerd en $\Delta\varphi = Q(\underline{r})$.

Bewijs met behulp van de tweede stelling van Green:

$$4\pi\varphi(\underline{p}) = \iint_S \left(\frac{1}{r_p} \frac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{1}{r_p} \right) \right) d\sigma - \iiint_G \frac{Q(\underline{r})}{r_p} d\tau \quad (11.11)$$

Als $Q(\underline{r}) = 0$, is dit formule (11.7).

12. Tweedimensionale velden

Fysisch zijn twee-dimensionale velden niet realiseerbaar. We kunnen deze velden echter opvatten als de beschrijving van drie-dimensionale velden waarin het coördinatenstelsel zo gekozen kan worden dat voor scalaire functies U en vectoren $\underline{v}$ geldt:

$$\begin{aligned} U &= U(x,y) \\ \text{en } \underline{v} &= (u(x,y), v(x,y), 0) \end{aligned} \quad (12.1)$$

De rotatie

$$\text{rot } \underline{v} = 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \underline{k}$$

kan hier opgevat worden als een scalaire operatie:

$$|\text{rot}| \underline{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

We werken nu verder in het platte vlak:

$$\begin{aligned} U &= U(x,y) \\ \underline{v} &= (u(x,y), v(x,y)) \\ \text{grad } U &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \text{div } \underline{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ |\text{rot}| \underline{v} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\text{Merk op:} \quad \text{div } (u,v) = |\text{rot}| (-v,u) \quad (12.3)$$

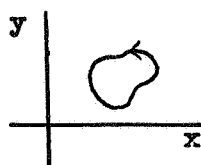
Een richtingsvector $\underline{n}$ wordt gegeven door $\underline{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, zodat bij voorbeeld

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{n}} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha. \quad (12.4)$$

Is $\underline{x}(s) = (x(s), y(s))$ een ruimtekromme, waarbij s de booglengteparameter, dan is de eenheidsraakvector $\dot{\underline{x}}(s) = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$. Voor de normaal in $\underline{x}(s)$ op de kromme zijn twee richtingsmogelijkheden:

$$\underline{n}(s) = (\pm \frac{dy}{ds}, \mp \frac{dx}{ds}).$$

Voor de omloopszin bij gesloten krommes wordt afgesproken:



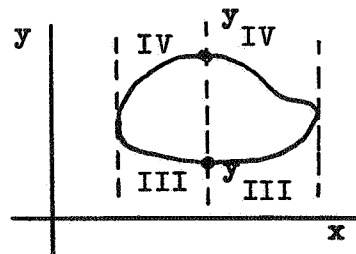
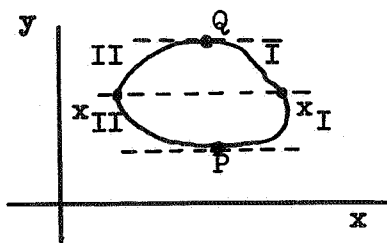
tegengesteld aan die van de wijzers van een uurwerk (het binnengebied steeds aan linkerkant).
Dan is $\underline{n} = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$ t.o.v. het binnengebied naar buiten gericht.

De stelling van Gauss in twee dimensies luidt:
(D een gesloten gebied in het platte vlak met rand K; $\underline{n}$ de t.o.v. D naar buiten gerichte normaal op K)

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_K \underline{v} \cdot \underline{n} ds \quad (12.5)$$

Dit is ook direkt te zien.

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int dy \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int du \int \frac{\partial v}{\partial y} dy =$$



$$\begin{aligned} &= \int dy \{u(x_I, y) - u(x_{II}, y)\} + \int dx \{v(x, y_{IV}) - v(x, y_{III})\} \\ &= \int_P^Q u dy - \int_P^Q u dy + \int_E^F v dx - \int_E^F v dy \\ &\quad \text{(I)} \quad \text{(II)} \quad \text{(IV)} \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_K u \, dy - \oint_K v \, dx \\
&= \oint_K \left(u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} \right) ds = \oint_K \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds
\end{aligned}$$

De stelling van Stokes in twee dimensies luidt:

$$\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_K \underline{v} \cdot \underline{ds} \quad (12.6)$$

Ook weer direkt in te zien:

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy &= \int dy \int \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int dx \int \frac{\partial u}{\partial y} dy \\
&= \oint_K v \, dy + \oint_K u \, dx = \oint_K \underline{v} \cdot \underline{ds}
\end{aligned}$$

Poolcoördinaten (r, θ ; kromlijng, orthogonaal)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (12.7)$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (12.8)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (12.9)$$

$$|\text{rot}| \, \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (12.10)$$

Opgaven:

- Bewijs (12.6) uit (12.5).
- Bewijs (12.7) en (12.8) uit de definities.
- Als $\underline{v} = (u, v)$ in het rechthoekige coördinatenstelsel en $\underline{v} = (v_r, v_\theta)$ in het poolcoördinatenstelsel, bewijs dan:

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta$$

$$v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

Druk ook u en v in v_r en v_θ uit.

d) Bewijs (12.10) uitgaande van

$$|\text{rot}| \underline{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ onder gebruikmaking van c).}$$

We houden ons nu bezig met oplossingen van $\Delta U = 0$.

De elementaire oplossing, d.w.z. de oplossing die alleen afhankelijk is van $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, kunnen we vinden met (12.9):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$U(r) = C_1 \log r + C_2, \quad r \neq 0.$$

Dit is ook direkt te zien. Met een tweedimensionale bron ter sterkte Q in de oorsprong is de flux door elke cirkel gelijk aan Q .

Dus $2\pi r v_r = Q,$

of $v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (v = \frac{Q}{2\pi r^2} r)$

zodat $U = \frac{Q}{2\pi} \log r + C_2.$

U , de zogenaamde logarithmische potentiaal, is de potentiaal van een enkelvoudige puntbelegging.

$U(r)$ is singulier in 0 en in ∞ .

Een fysische voorstelling van deze potentiaal krijgen we door uit te gaan van een enkelvoudige massa-belegging der z -as met constante dichtheid ρ . In elk vlak $\perp$ z -as hebben we hetzelfde veld.

De potentiaal in (x, y) is

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{met } r^2 = x^2 + y^2.$$

Dit is een divergente integraal.

Met een belegging van de z -as tussen $z = -A$ en $z = A$ vinden we voor de potentiaal

$$\bar{U}(x, y) = \int_{-A}^A \frac{\rho dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{met } r^2 = x^2 + y^2,$$

en voor de veldsterkte-componenten:

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -\rho x \int_{-A}^A \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = (z = r \sinh \lambda) \\ &= -\frac{2\rho x}{r^2} \tanh \lambda_1 \quad \text{met } \sinh \lambda_1 = \frac{A}{r}. \end{aligned}$$

en $\bar{F}_{1,y} = - \frac{2\rho y}{r^2} \tanh \lambda_1.$

Nu geldt voor

$$F_x = \lim_{A \rightarrow \infty} \bar{F}_x = - \frac{2\rho x}{r^2}$$

en $F_y = \lim_{A \rightarrow \infty} \bar{F}_y = - \frac{2\rho y}{r^2}$

$$(\underline{F} = - \frac{2\rho}{r^2} \underline{r})$$

dat het juist de veldsterkte is behorende bij een enkelvoudige belegging van de oorsprong met potentiaal $U(r) = -2\rho \log r$. De verklaring ligt in het feit dat een vermeerdering van $\bar{U}$ met een term die alleen van A afhangt de veldsterkte niet doet veranderen.

Voor een enkelvoudige pool in een punt A is de potentiaal

$$U = \frac{Q}{2\pi} \log |\underline{r} - \underline{r}_A| + C_2$$

en de veldsterkte

$$\underline{F} = \frac{Q}{2\pi |\underline{r} - \underline{r}_A|^2} (\underline{r} - \underline{r}_A) \quad (12.11)$$

De potentiaal van een dipool in punt A ter sterkte E met asrichting $\underline{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ is analoog met die van een dipool in de ruimte:

$$\begin{aligned} U(\underline{r}) &= - E \frac{\partial}{\partial \underline{n}} \log |\underline{r} - \underline{r}_A| \\ &= E \frac{\partial}{\partial \underline{n}_A} \log |\underline{r} - \underline{r}_A| \\ &= - E \frac{(x-x_A) \cos \alpha + (y-y_A) \sin \alpha}{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} \\ &= - E \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_A)}{|\underline{r} - \underline{r}_A|^2} \end{aligned} \quad (12.12)$$

De stellingen van Green

Zij φ een funktie, gedefinieerd op een gesloten gebied D in het platte vlak. K is de randkromme van D ; $\underline{n}$ de t.o.v. D naar buiten gerichte normaal op K . Substitueer $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ in (12.5):

$$\iint_D (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \, dx \, dy = \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \, ds \quad (12.13)$$

(1° stelling van Green)

dus

$$\Delta \varphi = 0 \text{ op } D \Rightarrow \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \, ds = 0. \quad (12.14)$$

Substitueer $\underline{v} = \phi \text{ grad } \varphi$ in (12.5)

$$\iint_D (\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \phi + \phi \Delta \varphi) \, dx \, dy = \int_K \phi \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \, ds \quad (12.15)$$

Verwisseling van ϕ en φ en aftrekken:

$$\iint_D (\phi \Delta \varphi - \varphi \Delta \phi) \, dx \, dy = \int_K \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} \right) \, ds \quad (12.16)$$

(2° stelling van Green)

Hieruit volgt

$$\Delta \varphi = 0 \text{ en } \Delta \phi = 0 \text{ op } D \Rightarrow \int_K \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} \right) \, ds = 0 \quad (12.17)$$

Stel nu $\underline{p}$ vast in D , $\underline{r}$ variabel in D , $r_p = |\underline{r} - \underline{p}|$, $\phi = \log r_p$ en $\Delta \varphi = \rho(x, y)$.

Om (12.16) te kunnen toepassen beschouwen we het gebied $D - C_1$, waarbij C_1 de cirkelschijf $(\underline{p}, \delta)$ is met rand C . $\Delta \phi = 0$ op $D - C_1$, dus (12.16)

$$\begin{aligned} \iint_{D-C_1} \rho(x, y) \log r_p \, dx \, dy &= \int_K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_p - \varphi \frac{\partial \log r_p}{\partial \underline{n}} \right) \, ds \\ &+ \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_p - \varphi \frac{\partial \log r_p}{\partial \underline{n}} \right) \, ds. \end{aligned}$$

De limiet voor $\delta \rightarrow 0$ van de integraal in het linkerlid bestaat, hetgeen men gemakkelijk aantoonst door eerst poolcoördinaten te substitueren. Overigens blijkt het ook uit het volgende.

Op C is $r_P = \delta$, $ds = \delta d\theta$,

$$\frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} = -\frac{1}{r_P} \text{ want } \underline{n} \text{ gericht als } \underline{p-r},$$

zodat

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_P - \varphi \frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} \right) ds =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log \delta + \frac{\varphi}{\delta} \right) \delta d\theta =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \delta \log \delta \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} d\theta + \int_C \varphi d\theta \right\} =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \varphi d\theta = 2\pi \varphi(\underline{p}).$$

Dus

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \left(\varphi \frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_P \right) ds + \frac{1}{2\pi} \iint_D \rho(x,y) \log r_P dx dy \quad (12.18)$$

(3° stelling van Green)

en

$$\Delta \varphi = 0 \text{ op } D \Rightarrow \varphi(\underline{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \left(\varphi \frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_P \right) ds. \quad (12.19)$$

Bijzonder geval. Het gebied D is een cirkel met straal R en middelpunt M , terwijl $\Delta \varphi = 0$ op D .

Dus

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \frac{1}{2\pi} \int_K \left(\varphi \frac{\partial \log r_M}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_M \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{\varphi}{R} ds - \frac{1}{2\pi} \log R \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} ds \\ &\stackrel{(12.14)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{\varphi}{R} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(R, \theta) d\theta \end{aligned}$$

dus

$$\varphi(M) = \text{gemiddelde waarde van } \varphi \text{ over } K. \quad (12.20)$$

Evenals in drie dimensies volgt hieruit:

de extreme waarden van een op een gesloten gebied D harmonische functie worden op de rand van D aangenomen. (12.21)

En hieruit:

het tweedimensionale probleem van Dirichlet heeft hoogstens één oplossing.

De functie van Green

D is een gesloten gebied met rand K . f is een op K gedefinieerde functie. Het probleem van Dirichlet: zoek functies φ met $\Delta\varphi = 0$ op D en $\varphi = f$ op K .

We weten al dat er hoogstens één functie is. Volgens (12.19) is φ bepaald door

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \left(\varphi \frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_P \right) ds$$

waarbij $\underline{p} \in D$ en $r_P = |\underline{x} - \underline{p}|$.

We proberen nu voor $\varphi(\underline{p})$ een uitdrukking te vinden waarin geen afgeleide van φ voorkomt.

Laat ϕ voldoen aan $\Delta\phi = 0$ op D en $\phi = \log r_P$ op K (ϕ kan niet overal op D gelijk zijn aan $\log r_P$ want $\log r_P$ is niet gedefinieerd in P).

Volgens (12.17) is

$$0 = \int_K \left(\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \phi \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \right) ds.$$

Dus

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \left(f \frac{\partial \log r_P}{\partial \underline{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \log r_P \right) ds$$

en

$$0 = \int_K \left(f \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} - \log r_P \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} \right) ds$$

zodat

$$\varphi(\underline{p}) = \int_K \frac{\partial G_P}{\partial \underline{n}} ds \quad \text{met } G_P = \frac{1}{2\pi} (\log r_P - \phi). \quad (12.22)$$

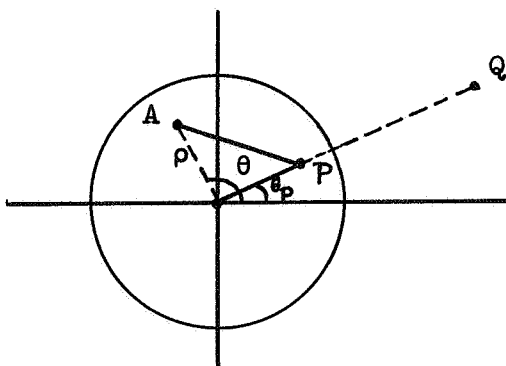
Het probleem van Dirichlet is dus opgelost, indien de functie G_P bekend is. De functie G_P heet de functie van Green van de eerste soort voor het gebied D . (Die van de tweede soort treedt op bij het probleem van Neumann.)

G_P heeft de volgende eigenschappen:

- 1) Voor elk punt $\neq P$ van D is $\Delta G_P = 0$.
- 2) Op K is $G_P = 0$.
- 3) G_P heeft in P een logarithmische singulariteit:
in een omgeving van P is
$$G_P = \frac{1}{2\pi} \log r_P + \text{reguliere functie} \quad (12.23)$$

We bepalen G_P voor het geval dat D een cirkelvormig gebied met straal R is.

Neem de oorsprong van het coördinatenstelsel in het middelpunt van D . We gaan over op poolcoördinaten (ρ, θ) . Q is het spiegelpunt van P



t.o.v. de cirkel:

$$\rho_Q = \frac{R^2}{\rho_P}$$

$$G_P(A) = G_P(\rho, \theta) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \log r_P - \frac{1}{2\pi} \phi.$$

Voor de functie $\log r_Q = \log |\underline{r} - \underline{q}|$ geldt: $\Delta \log r_Q = 0$ op D .

Nemen we $\phi = \log r_Q + \log C$, C onafhankelijk van ρ en θ , dan is $\Delta G_P = 0$ op D , behalve in P , en ϕ regulier op D .

Verder is $G_P = 0$ op de rand, als

$$\log C = \log r_P - \log r_Q$$

dus
$$C = \frac{r_P}{r_Q} = \frac{|\underline{r} - \underline{p}|}{|\underline{r} - \underline{q}|}.$$

De verhouding $\frac{r_P}{r_Q}$ heeft voor elk punt $\underline{r}$ op de cirkelrand dezelfde waarde. (Ga dit na; de gegeven cirkel is de cirkel van Apollonius behorende bij P en Q).

Voor de waarde vinden we $\frac{\rho_P}{R}$. Dus aan de eisen (12.23) is voldaan door

$$G_P(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \log r_P - \frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho_P}{R} r_Q$$

$$r_P = AP = \sqrt{\rho^2 + \rho_P^2 - 2\rho\rho_P \cos(\theta - \theta_P)}$$

$$r_Q = AQ = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_P^2} - 2\rho \frac{R^2}{\rho_P} \cos(\theta - \theta_P)}$$

zodat

$$\begin{aligned} G_P(\rho, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \log \frac{R^2 r_P^2}{\rho_P^2 r_Q^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \frac{R^2 (\rho^2 + \rho_P^2 - 2\rho\rho_P \cos(\theta - \theta_P))}{\rho_P^2 \rho^2 + R^4 - 2R^2 \rho_P \rho \cos(\theta - \theta_P)}. \end{aligned}$$

Opmerking 1

Verwisseling van ρ met ρ_P en θ met θ_P verandert de waarde niet, dus

$$G_P(A) = G_A(P)$$

of

$$G_{\rho_P, \theta_P}(\rho, \theta) = G_{\rho, \theta}(\rho_P, \theta_P) = G(\rho, \theta; \rho_P, \theta_P).$$

Opmerking 2

Inderdaad is $G_P(R, \theta) = 0$.

De oplossing van het probleem van Dirichlet voor deze cirkel is ($f(\theta)$ gegeven op de rand)

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_P, \theta_P) &= \int_K f(\theta) \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} ds = R \int_0^{2\pi} f(\theta) \left\{ \frac{\partial G}{\partial \rho} \right\}_{\rho=R} d\theta \\ &= R \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \rho_P^2}{2\pi R(R^2 + \rho_P^2 - 2R\rho_P \cos(\theta - \theta_P))} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \rho_P^2}{R^2 + \rho_P^2 - 2R\rho_P \cos(\theta - \theta_P)} d\theta \end{aligned}$$

(de integraal van Poisson)

Opm.1

$$\varphi(0, \theta_P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \text{ in overeenstemming met (12.20).}$$

Opm.2

Men kan bewijzen dat $\varphi(R, \theta_P) = f(\theta_P)$.

De functie van Green is symmetrisch, dat wil zeggen

$$G_P(Q) = G_Q(P), \quad P \in D, \quad Q \in D. \quad (12.24)$$

Hierbij is D weer een gesloten gebied met rand K , ϕ een functie op D met $\Delta\phi = 0$ op D en $\phi = \log r_P$ op K , terwijl

$$G_P(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi} (\log r_P - \phi).$$

Bewijs:

Laten D_1 en D_2 cirkelvormige gebiedjes zijn om P resp. Q met rand C_1 resp. C_2 en straal δ_1 resp. δ_2 . Zij R variabel in D .

Op $D - D_1 - D_2$ is $\Delta G_P(R) = 0$ en $\Delta G_Q(R) = 0$ en op K is $G_P = 0$ en $G_Q = 0$.

Toepassing van (12.17) geeft dan

$$\int_{C_1} (G_P \frac{\partial G_Q}{\partial \underline{n}} - G_Q \frac{\partial G_P}{\partial \underline{n}}) ds + \int_{C_2} (G_P \frac{\partial G_Q}{\partial \underline{n}} - G_Q \frac{\partial G_P}{\partial \underline{n}}) ds = 0.$$

Nemen we nu de limiet voor $\delta_1 \rightarrow 0$ en $\delta_2 \rightarrow 0$, bedenkend dat op D_1 de functie G_Q regulier is en $G_P = \frac{1}{2\pi} \log r_P + \text{reguliere functie}$ (en analoog voor D_2), dan vinden we

$$G_Q(P) - G_P(Q) = 0$$

(vergelijk de berekening voor de derde stelling van Green).

Opgave e) Bewijs het volgende. Het probleem van Dirichlet voor een driedimensionaal gebied L met randoppervlak S is opgelost zodra we voor L een functie $G_P(\underline{r})$ geconstrueerd hebben, die aan de volgende eisen voldoet (P is een punt van L met plaatsvector $\underline{p}$)

$$1^\circ \quad \underline{r} \in L \Rightarrow \Delta G_P = 0.$$

$$2^\circ \quad \text{Voor } \underline{r} \text{ in de omgeving van } P \text{ is}$$

$$G_P(\underline{r}) = \frac{1}{r_P} + \phi$$

waarbij ϕ een reguliere functie is en $r_P = |\underline{r} - \underline{p}|$.

$$3^\circ \quad \underline{r} \in S \Rightarrow G_P = 0.$$

De oplossing van het probleem luidt dan: $\phi(\underline{p}) = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi \frac{\partial G_P}{\partial \underline{n}} ds$.

De functie $G_P(\underline{r})$ is de functie van Green (van de 1° soort) voor het gebied L .

Opgave f) Bepaal de funktie van Green van de eerste soort voor een bol met straal R .

Antwoord:

$$G_P(\underline{r}) = (\rho_P^2 + \rho^2 - 2\rho_P\rho \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} - R (R^4 + \rho^2 \rho_P^2 - 2R^2 \rho \rho_P \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} \quad (12.26)$$

waarbij $\rho_P = |\underline{p}|$, $\rho = |\underline{r}|$, $\alpha = \angle(\underline{p}, \underline{r})$.

13. Theorie der complexe funkties

Een complex getal z is een geordend tweetal reële getallen:

$z = (a, b)$. a is het reële deel, b het imaginaire deel van z :

$a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$.

De definities voor optellen en vermenigvuldigen zijn zodanig dat, als we schrijven $z = a + bi$, de rekenregels voor de reële getallen gelden waarbij we i^2 kunnen vervangen door -1 en omgekeerd.

Dus

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

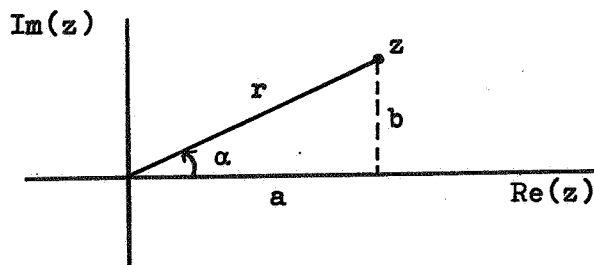
Aftrekken en delen zijn omgekeerde bewerkingen, bv.

$$\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2} i.$$

De getallen $z = a+bi$ en $\bar{z} = a-bi$ heten complex-geconjugueerd.

De modulus $|z|$ van $z = a+bi$ is gelijk aan $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

De complexe getallen kunnen 1-1-duidelijk worden toegevoegd aan de punten van een plat vlak, door in dit vlak een rechtsdraaiend rechthoekig coördinatenstelsel te kiezen en het punt $P(a, b)$ toe te voegen aan het getal $a+bi$. Heeft P de poolcoördinaten (r, α) dan is



$$z = a+bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

z is door $r = |z|$ en het argument α eenduidig bepaald.

Omgekeerd: r is door z eenduidig bepaald, α is door z bepaald op

veelvouden van 2π na: $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$, $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$.

Onder de hoofdwaarde van $\arg z$ verstaan we de waarde van α die voldoet aan

$$-\pi < \alpha \leq \pi.$$

De functie $\arg z$ maakt bij doorgang door de negatief-reële as een sprong ter grootte 2π .

Met poolcoördinaten wordt de vermenigvuldiging:

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \rho(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= r\rho(\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

Dus $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

en $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$

Vraag: kunnen we in deze laatste regel de hoofdwaarden der argumenten nemen?

We tonen nu aan voor x reëel: $\cos x + i \sin x = e^{ix}.$

Voor α en x reëel kan de functie $z = e^{\alpha x}$ gedefinieerd worden door

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \alpha z \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Opgave a)

Bewijs: $e^{\alpha x} e^{\beta x} = e^{(\alpha+\beta)x}.$

We definiëren nu de functie $z = e^{ix}$ door

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = iz \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

$z(x)$ moet dus voldoen aan

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dx^2} = -z \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = i. \end{cases}$$

Hier van, en ook van (*), is de oplossing

$$z(x) = \cos x + i \sin x.$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ (Euler)}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

(13.1)

dus

$$\cos ix = \cosh x$$

$$\sin ix = i \sinh x$$

Opgave b)

$$\text{Bewijs: } e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Opgave c)

Bepaal alle oplossingen van $\sin z = 5i$. De vermenigvuldigingsregel wordt nu

$$(a+bi)(c+di) = (r e^{i\alpha})(\rho e^{i\beta}) = r\rho e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Functies van een complexe veranderlijke

Stel V is een verzameling van complexe getallen. w is een (eenduidige) functie van z , gedefinieerd op V , indien aan elke $z \in V$ volgens een gegeven voorschrift één getal w is toegevoegd: $w = f(z)$. Met $z = x+iy$, $w = u+iv$ is $f(z)$ dus gelijkwaardig met twee reële functies van twee reële variabelen:

$$w = u(x,y) + iv(x,y).$$

We zullen echter verder gaan dan deze interpretatie en voor complexe functies differentieerbaarheid eisen op dezelfde manier als bij reële functies van een reële variabele (bijvoorbeeld willen we als afgeleide van z^2 de functie $2z$, van $\sin z$ de functie $\cos z$).

Zij G een open gebied in het complexe z -vlak. $w = f(z)$ is continu in $z_0 \in G$, indien bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ is aan te geven zodanig dat

$$\left. \begin{array}{l} z \in G \\ |z - z_0| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

We schrijven $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$, indien bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal

$\delta > 0$ is aan te geven zodanig dat

$$\left. \begin{array}{l} z \in G \\ 0 < |z - z_0| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) - \ell| < \epsilon.$$

De funktie $w = f(z)$ is differentieerbaar in $z_0 \in G$, indien

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

bestaat. We noteren deze limiet met $\left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} = f'(z_0)$: de afgeleide van $f(z)$ in z_0 .

Het bestaan van de limiet houdt in dat de waarde onafhankelijk is van de richting waarlangs Δz naar nul gaat.

Stel $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \delta(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \delta e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) - f(z_0)}{\delta} e^{-i\varphi} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \{ u(x_0 + \delta \cos \varphi, y_0 + \delta \sin \varphi) + iv(x_0 + \delta \cos \varphi, y_0 + \delta \sin \varphi) + \\ &\quad - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \} e^{-i\varphi} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x_0 + \delta \cos \varphi, y_0 + \delta \sin \varphi) - u(x_0 + \delta \cos \varphi, y_0)}{\delta \sin \varphi} \sin \varphi + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \dots \right\} e^{-i\varphi} \\ &= \left\{ \sin \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \cos \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + i \sin \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + i \cos \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \right\} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \sin \varphi \cos \varphi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \right) + \\ &\quad + i \{ \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \sin \varphi \cos \varphi \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \right) \} . \end{aligned}$$

(De vier partiële afgeleiden bestaan omdat de limiet ook moet bestaan als $\varphi = 0$ en als $\varphi = \frac{1}{2}\pi$)

Aan onze eis, dat de limiet onafhankelijk is van φ , is voldaan indien

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = 0 \text{ en } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = 0. \text{ (Cauchy'se voorwaarden)}$$

We hebben zo gevonden:

Als $w = f(z)$ differentieerbaar is in z , en we schrijven $z = x+iy$, $w = u+iv$, dan

1) bestaan $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$;

2) is voldaan aan de volgende differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} ; \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ en } f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} . \end{aligned} \quad (13.3)$$

Definitie: De functie $f(z)$ is (regulier-) analytisch in een gebied G , indien $f(z)$ differentieerbaar is in elk punt $z \in G$.
De functie $f(z)$ is analytisch in een punt $z_0 \in G$, indien $f(z)$ analytisch is in een omgeving van z_0 .

Zonder bewijs:

Als in een gebied G de functies $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ bestaan, continu zijn en voldoen aan (13.3), dan is $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ een in G regulier-analytische functie. (13.4)

Opgave d)

Bewijs dat de bekende regels voor het differentiëren, ook de kettingregel, gewoon doorgaan.

Zonder bewijs: Is $f(z)$ een in G analytische functie, dan is ook $f'(z)$ analytisch in G . (13.5)

Opgave e)

Bewijs: als $f(z) = \text{constant}$, dan $f'(z) = 0$
als $f(z) = z^n$ (n geheel), dan $f'(z) = nz^{n-1}$.

Opgave f)

Bewijs dat de functie $f(z) = \text{Re}(z)$ in geen punt analytisch is.

Opgave g)

Bewijs: als $f(z)$ differentieerbaar is in z_0 , dan is $f(z)$ continu in z_0 .

Uit (13.2) volgt (nogmaals differentiëren en daarna elimineren):

als $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytisch is in een gebied G , dan voldoen u en v in G aan de vergelijking van Laplace

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\end{aligned}\tag{13.6}$$

Uiteraard geldt de omkering niet (zie 13.2). Later zal blijken dat v op een constante na door u bepaald is; u en v heten geconjugeerde functies.

Voorbeeld. $f(z) = z^2$; $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$; $f'(z) = 2z$

Verifieer (13.2, 3, 6).

Voorbeeld. $f(z) = \sin z$; $\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$; $f'(z) = \cos z$.

Verifieer (13.2, 3, 6).

Voorbeeld. $f(z) = e^z$; $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$; $f'(z) = e^z$.

Verifieer (13.2, 3, 6).

Definitie: $\log z = \log |z| + i \arg z$.

De logaritmie is dus een meerwaardige functie. De hoofdwaarde van $\log z$, die we krijgen door voor $\arg z$ de hoofdwaarde te nemen, is een eenduidige functie. Het vlak vertoont dan een snede, nl. de halfrechte $\{x \leq 0, y = 0\}$. $\log z$ is niet gedefinieerd in $z = 0$.

Stel $x < 0$. Per definitie is $\log x = \log |x| + i\pi$, terwijl

$$\log(x+iy) = \log |x| - i\pi.$$

Aan de snede maakt $\log z$ dus een sprong ter grootte $2\pi i$.

Als $z = x+iy$, $f(z) = u+iv$, dan geeft $f(z) = \log z$:

$$u = \log \sqrt{x^2+y^2}, \quad v = \arctan \frac{y}{x} + \begin{cases} 0 & \text{als } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{als } x > 0, y < 0 \\ -\pi & \text{als } x < 0, y < 0 \\ +\pi & \text{als } x < 0, y > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Beschouw v en u opvolgend als de componenten van een tweedimensionale vector $\underline{v} = (v, u)$.

De vergelijkingen (13.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

kunnen worden geschreven als $\begin{aligned} |\text{rot}| \underline{v} &= 0 \\ \text{div} \underline{v} &= 0. \end{aligned}$

Met behulp van de divergentiestelling (12.5) en de circulatoriestelling (12.6) volgt dan: voor een gesloten gebied D met randkromme K geldt (omloopszin van K en richting der normaal als in 12):

$$\begin{aligned} \int_K \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds &= \iint_D \text{div} \underline{v} \, d\sigma = 0 \\ \int_K \underline{v} \cdot d\underline{s} &= \iint_D |\text{rot}| \underline{v} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Dus: is $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ een op D analytische functie, dan is

$$\int_K (vdy - udx) = 0 \quad (13.7)$$

en

$$\int_K (vdx + udy) = 0. \quad (13.8)$$

Beschouw een rectificeerbare kromme K in het complexe z -vlak met parametervoorstelling

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad t_A \leq t \leq t_B.$$

Onder de integraal van een functie $f(z)$ langs K verstaan we

$$\int_K f(z) \, dz = \int_{t_A}^{t_B} f(z(t)) \frac{dz}{dt} \, dt = \int_{t_A}^{t_B} f(z(t)) \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt \quad (13.9)$$

Zonder bewijs: Als $f(z)$ continu op K , dan bestaat de integraal (13.9).

Stelling: Is $f(z)$ analytisch binnen en op een gesloten kromme K , dan is

$$\int_K f(z) dz = 0 \quad (13.10)$$

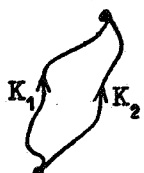
(Hoofdstelling der complexe integratie of integraalstelling van Cauchy)

Bewijs:

$$\begin{aligned} \int_K f(z) dz &= \int_K (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_K (udx-vdy) + i \int_K (udy+vdx) = 0 \end{aligned}$$

(zie 13.7, 8)

Gevolg: Zijn K_1 en K_2 twee krommen met dezelfde grenspunten en is $f(z)$ analytisch op K_1 , op K_2 en in het tussen-gebied, dan is



$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz \quad (13.11)$$

Voorbeeld (Knopp, Funktionentheorie)

$$f(z) = \operatorname{Re} z = x.$$

We berekenen $\int_{z=0}^{1+i} f(z) dz$ langs twee wegen:

(I) $z = (1+i)t, 0 \leq t \leq 1$

(II) a) $z = t, 0 \leq t \leq 1$

b) $z = 1+it, 0 \leq t \leq 1$

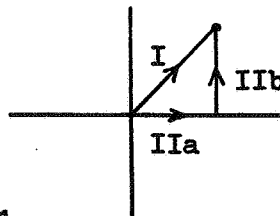
$$\int_0^{1+i} f(z) dz = \int_0^1 t(1+i) dt = \frac{1}{2} (1+i)$$

(I)

$$\int_0^{1+i} f(z) dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 1 \cdot i dt = \frac{1}{2} + i$$

(II)

(Vergelijk opgave f)



Voorbeeld.

C is de cirkel om $z = 0$ met straal R: $z = R e^{i\theta}$, θ parameter.

$$\int_C f(z) dz = i R \int_0^{2\pi} f(R e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

dus, n willekeurig,

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= i R \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} e^{i\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i & \text{als } n = -1 \quad (f(z) = \frac{1}{z}) \\ \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{2(n+1)\pi i} - 1) & \text{als } n \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dit is in overeenstemming met (13.10): als $n < 0$, is $f(z)$ niet regulier in $z = 0$ zodat $\int_C z^n dz$ niet noodzakelijk gelijk is aan nul.

We hebben gevonden:

Is C de cirkel met straal R om $z = z_0$, dan is

$$\left. \begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z-z_0} &= 2\pi i \\ \int_C (z-z_0)^n dz &= 0 \text{ als } n \text{ geheel } \neq -1. \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Singuliere punten

z_0 is een regulier punt van $f(z)$ als $f(z)$ analytisch is in z_0 ; anders heet z_0 een singulier punt.

Stel z_0 is een geïsoleerd singulier punt voor de functie $f(z)$, d.w.z. $f(z)$ is analytisch in een omgeving van z_0 , maar in z_0 niet differentieerbaar.

z_0 is een ophefbaar-singulier punt, indien $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ bestaat.

Is n het kleinste natuurlijke getal waarvoor $(z-z_0)^n f(z)$ analytisch is in z_0 , dan is z_0 een pool van de orde n .

Bestaat zo'n getal n niet, dan is z_0 een essentieel-singulier punt.

Het punt $z = \infty$

Het complexe vlak wordt afgesloten door één oneigenlijk punt, $z = \infty$. Het gedrag van een functie $f(z)$ in $z = \infty$ is per definitie het gedrag van $f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$.

Dus $f(z)$ analytisch in $z = \infty$, als $f(\frac{1}{z})$ analytisch in $z = 0$.

$z = \infty$ is een pool van de orde n voor $f(z)$, als $z = 0$ een pool van de orde n is voor $f(\frac{1}{z})$.

Voorbeelden. $f(z) = \frac{1}{z}$ heeft een pool van de orde 1 in $z = 0$.
 $f(z) = z^2$ heeft een pool van de orde 2 in $z = \infty$.
 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ heeft een pool van de orde 1 in $z = k\pi$ voor elke k , want $\frac{z-k\pi}{\sin z}$ is analytisch in $z = k\pi$.
 $f(z) = \frac{z}{\cos z}$ heeft onder andere een pool van de orde 1 in $z = \infty$.

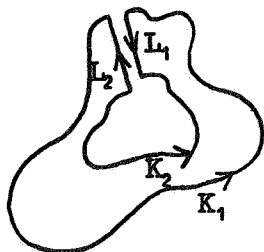
Stelling: Zijn K_1 en K_2 positief-georiënteerde gesloten krommen die elkaar niet snijden en is $f(z)$ analytisch op K_1 , op K_2 en in het tussengebied, dan is



$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz \quad (13.13)$$

Bewijs: Stel K_1 binnen K_2 . Het binnengebied van K_1 verbinden we door een "kanaal" met het buitengebied van K_2 . De overblijvende stukken van K_1 en K_2 noemen we K_1' en K_2' en de grenslijnen van het kanaal L_1 en L_2 ($L_1 // L_2$).

Volgens (13.10) is nu $\int_W f(z) dz = 0$ waarbij



$$W = K_1' + L_1 - K_2' + L_2.$$

Of

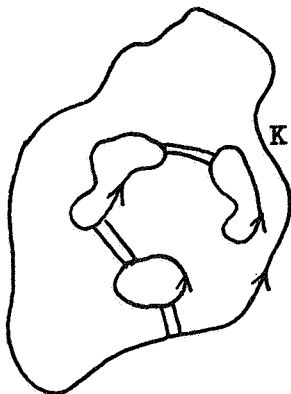
$$\int_{K_1'} f(z) dz + \int_{L_1} f(z) dz - \int_{K_2'} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz = 0.$$

Laten we nu de afstand van L_1 tot L_2 naar nul gaan, dan is

$$\int_{L_1} f(z) dz = - \int_{L_2} f(z) dz \quad (\text{tegengestelde oriëntatie}), \text{ terwijl}$$

K_1' en K_2' overgaan in K_1 en K_2 .

Stelling:



Is K een gesloten kromme, zijn $K_1, \dots, K_m$ gesloten krommen binnen K zodanig dat elk deze krommen buiten de andere ligt, zijn $K, K_1, \dots, K_m$ positief georiënteerd en is $f(z)$ analytisch op de randen van K en K_μ ($\mu = 1, \dots, m$) en in het tussengebied van K en K_μ ($\mu = 1, \dots, m$), dan is

$$\int_K f(z) dz = \sum_{\mu=1}^m \int_{K_\mu} f(z) dz \quad (13.14)$$

Bewijs: Analoog boven.

Stelling: Is $\varphi(z)$ op en binnen een gesloten kromme K analytisch, dan is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = \begin{cases} \varphi(a) & \text{als } a \text{ binnen } K \\ 0 & \text{als } a \text{ buiten } K \end{cases}$$

(integraalformule van Cauchy) (13.15)

Bewijs: Als a buiten K , dan $\frac{\varphi(z)}{z-a}$ analytisch op en binnen K , dus volgens (13.10)

$$\int_K \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = 0.$$

Stel a binnen K en laat C een cirkel om a zijn, binnen K , met straal δ . Volgens (13.13) is dan

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a} dz &= \int_C \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} d(\delta e^{i\theta}) \\ &= i \int_0^{2\pi} \varphi(a + \delta e^{i\theta}) d\theta = (\delta \text{ naar nul}) = 2\pi i \varphi(a). \end{aligned}$$

Opmerking

De functie $\varphi(z)$ is binnen K dus bepaald door haar waarden op K , als ze analytisch is op en binnen K .

Is $f(z)$ analytisch in een gereduceerde omgeving van a (d.w.z. a is uitgesloten), dan is er een cirkel C om a waarbinnen $f(z)$ analytisch is. Zijn K_1 en K_2 twee gesloten positief-georiënteerde krommen om a en binnen C , dan is (13.13)

$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz.$$

De uitdrukking

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz \quad (13.16)$$

is het residu van $f(z)$ in a .

Notatie: $(\text{Res.}f)_{z=a}$.

De waarde is dus onafhankelijk van de keuze der kromme.

Stelling: Is $f(z)$ op en binnen een gesloten kromme K analytisch, met uitzondering van een eindig aantal singuliere punten $a_1, \dots, a_m$ binnen K , dan is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz = \sum_{\mu=1}^m (\text{Res.}f)_{z=a_\mu}. \quad (\text{Residu-stelling})$$

Bewijs: Om elk punt a_μ slaan we een cirkel C_μ zodanig dat a_μ het enige singuliere punt binnen C_μ is. Dan is (13.14)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz = \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\mu} f(z) dz = \sum_{\mu=1}^m (\text{Res.}f)_{z=a_\mu}.$$

Heeft $f(z)$ een enkelvoudige pool in $z = a$, dan is

$$(\text{Res.}f)_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \quad (13.17)$$

Bewijs: Stel $\varphi(z) = (z-a) f(z)$; $\varphi(z)$ is analytisch in een omgeving van $z = a$, dus als C een cirkel om $z = a$ is binnen deze omgeving, dan is (13.15)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = \varphi(a)$$

of

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$$

Voorbeeld. K is een gesloten kromme om $z = 0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{1}{z} dz = 1.$$

Toepassing

Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$.

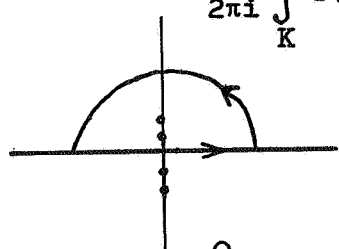
Met kwadraatafsplitsing:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left(\frac{\frac{1}{3}}{z^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{z^2+4} \right) dz \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \arctan z - \frac{1}{6} \arctan \frac{z}{2} \right]_{-R}^R \\
 &= \frac{1}{6} \pi.
 \end{aligned}$$

Met de residu-stelling:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} \quad \text{heeft enkelvoudige polen in } z = i, z = -i, z = 2i, z = -2i.$$

Neem als integratieweg de kromme K gevormd door het stuk $-R \leq z \leq R$ op de reële as en de halve cirkelboog C om $z = 0$ met straal R in het halfvlak $\text{Im}(z) > 0$.



$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) dz &= (\text{Res.} f)_{z=i} + (\text{Res.} f)_{z=2i} \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)} + \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z-2i}{(z^2+1)(z^2+4)} = \\
 &= \frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} = \frac{1}{12i}
 \end{aligned}$$

dus $\int_K f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_C f(z) dz = \frac{1}{6} \pi$

dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{6} \pi$, want

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{i R e^{i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} = 0$$

omdat
$$\left| \int_0^\pi \frac{i R e^{i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} \right|$$

$$\leq \pi R \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left| \frac{i R e^{i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} \right| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

Toepassing

Bepaal $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$ ($a > 0$) (MacRobert, Functions of a complex variable).

Voor complexe integratie schrijven we liever

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Nemen we als contour weer de kromme K uit het vorige voorbeeld, dan is de schatting van $\cos z$ langs C nogal lastig.

Daarom

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{x^2 + a^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx - \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx. \end{aligned}$$

We integreren $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ langs de kromme K. $f(z)$ heeft enkelvoudige polen in $z = \pm ia$, waarvan $z = ia$ binnen K ligt. $(\text{Res.} f)_{z=ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$

dus

$$\int_K f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_C f(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{i R(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} R i e^{i\theta} d\theta \right| \leq$$

$$\pi R \frac{e^{-R \sin \theta}}{R^2 - a^2}$$

dus

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0$$

dus

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{a} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

Opgave h)

Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ met complexe integratie.

Opgave i)

Stel $z = R e^{i\theta}$ ($-\pi < \theta < \pi$, $R > 0$).

Bewijs: $(k) \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \log R + i\theta$

waarbij k een kromme is die de negatief-reële as niet snijdt.

Cauchy-hoofdwaarde

Stel $a < c < b$, $|f(x)| \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow c$ en $f(x)$ integreerbaar op elk deelsegment van $[a, b]$ dat c niet bevat.

We noemen $\int_a^b f(x) dx$ en oneigenlijke integraal en definiëren

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \downarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \downarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx$$

indien deze twee limieten bestaan.

Het is echter mogelijk dat deze limieten niet bestaan, terwijl wel de limiet

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right)$$

bestaat.

We noemen deze limiet de Cauchy-hoofdwaarde van $\int_a^b f(x) dx$, geschreven

$$\text{CHW} \int_a^b f(x) dx.$$

Voor een convergente integraal is

$$\text{CHW} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Voorbeeld

• $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$ is een divergente integraal.

Echter

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x^3 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right) = 0.$$

• $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x}$ is een divergente integraal.

Echter

$$\begin{aligned} \text{CHW} \int_{-2}^3 \frac{dx}{x} &= \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\int_{-2}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^3 \frac{dx}{x} \right) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} (\log \delta - \log 2 + \log 3 - \log \delta) \\ &= \log 3 - \log 2. \end{aligned}$$

De lineaire transformatie

De functie $w = f(z)$ is een afbeelding van het complexe z -vlak in het complexe w -vlak, dus - als we deze vlakken als identiek beschouwen - van het complexe z -vlak in zichzelf.

We beschouwen enkele speciale gevallen.

$w = az$ (a complex).

Dit is de identieke afbeelding als $a = 1$, een draaiing om $z = 0$ als $|a| = 1$, een dilatatie als a reëel > 0 en in het algemeen dus de samenstelling van een dilatatie en een draaiing.

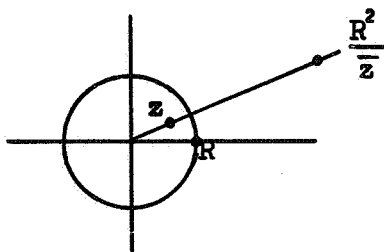
$w = az + b$ (a en b complex).

Dit is een afbeelding, samengesteld uit dilatatie, draaiing en translatie, gehele lineaire functie genoemd.

Invariante punten: $z = \frac{b}{1-a}$ en $z = \infty$.

$$w = \frac{R^2}{\bar{z}} \quad (R \text{ reëel}). \quad z = r e^{i\varphi} \Rightarrow w = \frac{R^2}{r} e^{-i\varphi}.$$

Het punt z en het beeldpunt w liggen dus op dezelfde straal uit $z = 0$,



terwijl voor de moduli geldt $|z||w| = R^2$.

Men noemt deze afbeelding:

inversie of spiegeling aan de cirkel om $z = 0$ met straal R .

De invariante punten zijn de punten $|z| = R$.

$$w = \bar{z}.$$

Dit is een spiegeling aan de reële as. Invariante punten: $\text{Im}(z) = 0$.

$w = \frac{R^2}{z}$ is dus een afbeelding, samengesteld uit een inversie aan de cirkel ($z = 0, R$) en een spiegeling aan de reële as.

Invariante punten: $z = R$ en $z = -R$.

De afbeeldingen $w = az + b$ en $w = \frac{R^2}{z}$ zijn 1-1-duidelijk als $a \neq 0$.

Onder een lineaire functie (of Möbius-transformatie) verstaat men een functie van het type

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{met } ad - bc \neq 0. \quad (13.18)$$

We onderstellen $ad \neq bc$, omdat het dan een 1-1-duidelijke functie is.

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

De functie $w = \frac{az + b}{cz + a}$ is te schrijven als

$$w = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c}) \frac{1}{cz + d}$$

en is dus kennelijk een afbeelding, samengesteld uit de translatie: $z' = cz + d$, de inversie aan de eenheidscirkel gevolgd door spiegeling aan de reële as: $z'' = \frac{1}{z'}$ en de gehele lineaire functie: $w = (b - \frac{ad}{c}) z'' + \frac{a}{c}$.

Stelling. De functie $w = \frac{R^2}{z}$ ($R \neq 0$) heeft de volgende eigenschappen:

- een rechte door $z = 0$ wordt op zichzelf afgebeeld;
- een rechte niet door $z = 0$ wordt op een cirkel afgebeeld die door $z = 0$ gaat, en omgekeerd;
- een cirkel die niet door $z = 0$ gaat, wordt afgebeeld op een cirkel die niet door $z = 0$ gaat.

Bewijs

Stel $z = x + iy$, $w = X + iY$.

$$w = \frac{R^2}{z} \text{ geeft } X = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{-R^2 y}{x^2 + y^2}, X^2 + Y^2 = R^4 / (x^2 + y^2).$$

De vergelijking van een cirkel in het z -vlak luidt:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

of

$$1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2} + \frac{2by}{x^2 + y^2} + \frac{c}{x^2 + y^2} = 0$$

dus

$$1 + \frac{2aX}{R^2} - \frac{2bY}{R^2} + \frac{c(X^2 + Y^2)}{R^4} = 0$$

of

$$c(X^2 + Y^2) + 2a R^2 X - 2b R^2 Y + R^4 = 0.$$

Dit is een cirkel die niet door $z = 0$ gaat.

De oorspronkelijke cirkel gaat door $z = 0$ als $c = 0$; het beeld is dan een rechte lijn die niet door $z = 0$ gaat.

Uit $w = \frac{R^2}{z}$ volgt $z = \frac{R^2}{w}$, dus het omgekeerde geldt ook.

De vergelijking van een rechte door $z = 0$ luidt

$$ax + by = 0,$$

waaruit volgt $aX - bY = 0$.

Gevolg: De functie $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ($\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$) beeldt de verzameling der cirkels en rechte lijnen op zichzelf af.

Opgave j)

Bewijs dat door de functie $w = \frac{R^2}{z}$ cirkels, die de cirkel ($z = 0, R$) loodrecht snijden, in zichzelf worden overgevoerd.

Opgave k)

Bewijs: als $\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ en $w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}$ dan $w = \frac{az + b}{cz + d}$

$$\text{met } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Zonder bewijs:

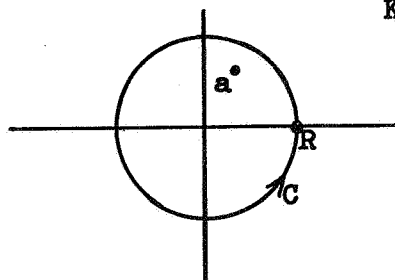
Bij drie verschillende punten z_1, z_2, z_3 is er precies één lineaire functie die deze punten afbeeldt op drie gegeven verschillende punten w_1, w_2, w_3 .

(13.19)

14. De integraal van Poisson

Als $f(z)$ analytisch is in G , K een gesloten kromme in G om a , dan is

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z-a} dz.$$



Dan is

We nemen nu voor K de cirkel C ($z = 0, R$) en stellen $a = r e^{i\varphi}$.
Op C stellen we $z = R e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} f(r e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta} - r e^{i\varphi}} i R e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta})}{R - r e^{i(\varphi-\theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta}) (R - r \cos(\varphi-\theta) + i r \sin(\varphi-\theta)) R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \end{aligned}$$

(14.1)

Het spiegelpunt van a aan C , dit is het punt $R^2/\bar{a}$, ligt buiten C , dus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \frac{R^2}{\bar{a}}} dz = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta})}{r - R e^{i(\varphi-\theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta}) (r - R \cos(\varphi-\theta) + i R \sin(\varphi-\theta)) r}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \end{aligned}$$

(14.2)

Optellen geeft

$$f(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(R e^{i\theta}) + \frac{2iRr \sin(\varphi-\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} \right\} d\theta$$

dus (zie 12.20)

$$f(r e^{i\varphi}) - f(0) = \frac{iRr}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{i\theta}) \sin(\varphi-\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (14.3)$$

Aftrekken geeft

$$f(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(R e^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (14.4)$$

Schrijven we $f(r e^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ en stellen we $u(R, \varphi) = g(\varphi)$, $v(R, \varphi) = h(\varphi)$, dan vinden we

$$u(r, \varphi) - u(0) = \frac{Rr}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta) \sin(\theta-\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (14.5)$$

$$v(r, \varphi) - v(0) = \frac{Rr}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) \sin(\varphi-\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (14.6)$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) g(\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (14.7)$$

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) h(\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (14.8)$$

We hebben de integraal van Poisson weer gevonden (u en v voldoen aan $\Delta u = 0$ resp. $\Delta v = 0$; vgl. blz. 72). Bovendien hebben we in (14.5) en (14.6) $u(r, \varphi)$ en $v(r, \varphi)$ uitgedrukt in elkaars waarden op C.

Nadering van r tot R moet in (14.7) en (14.8) opleveren $u(R, \varphi) = g(\varphi)$ en $v(R, \varphi) = h(\varphi)$; vergelijk opmerking 2 bij de integraal van Poisson (blz. 72).

Nadering van r tot R in (14.5) en (14.6) geeft

$$g(\varphi) - u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cot \frac{1}{2} (\theta - \varphi) d\theta \quad (14.9)$$

en

$$h(\varphi) - v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cot \frac{1}{2} (\varphi - \theta) d\theta \quad (14.10)$$

Dit zijn divergente integralen, waaraan we een betekenis kunnen toe-kennen door de Cauchy-hoofdwaaarde te nemen:

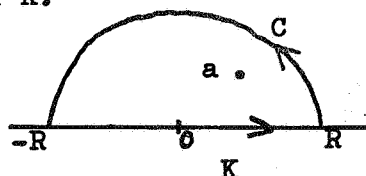
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi-\epsilon} \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\epsilon}^{2\pi} \dots \right).$$

We komen hierop terug.

We beschouwen de funktie $w(z)$, analytisch in $\text{Im } z \geq 0$. Neem voor K de kromme gevormd door het stuk $[-R, R]$ van de reële as en de halve cirkelboog C met straal R om $z = 0$, gelegen in $\text{Im}(z) \geq 0$.

Zij $a+bi$ een punt met $b > 0$, gelegen binnen K .

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{w(z)}{z-a-bi} dz = w(a+bi)$$



of

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{w(z)}{z-a-bi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{w(R e^{i\theta}) iR e^{i\theta}}{R e^{i\theta} - a - bi} d\theta = w(a+bi).$$

De limiet voor R naar oneindig van de tweede integraal is nul wanneer we veronderstellen dat op C de funktie $w(z)$ naar nul gaat als R naar oneindig gaat.

Dus

$$w(a+bi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x) dx}{x-a-bi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)(x-a+bi)}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (14.11)$$

$a-bi$ ligt niet binnen K , dus analoog

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x) dx}{x-a+bi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)(x-a-bi)}{(x-a)^2 + b^2} dx. \quad (14.12)$$

Optellen geeft

$$w(a+bi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a) w(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx. \quad (14.13)$$

Aftrekken

$$w(a+bi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b w(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx. \quad (14.14)$$

Schrijven we $w(a+bi) = u(a,b) + iv(a,b)$ en stellen we $u(a,0) = u(a)$, $v(a,0) = v(a)$, dan vinden we

$$u(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a) v(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (14.15)$$

$$v(a,b) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a) u(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (14.16)$$

$$u(a,b) = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (14.17)$$

$$v(a,b) = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (14.18)$$

Hierdoor zijn $u(a,b)$ en $v(a,b)$ uitgedrukt in elkaars waarden op de rand $\text{Im } z = 0$.

Opmerking. $\frac{b}{(x-a)^2 + b^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \log \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right)_{y=0}$;

dit is de potentiaal van een dipool in $a+bi$ met asrichting $\perp$ reële as (zie 12.12).

Nadering van b tot nul moet in (14.17) en (14.18) opleveren $u(a,0) = u(a)$ en $v(a,0) = v(a)$. We gaan dit na:

$$\begin{aligned} \lim_{b \downarrow 0} \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{(x-a)^2 + b^2} dx &= \lim_{b \downarrow 0} \left\{ \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) - u(a)}{(x-a)^2 + b^2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{\pi} u(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} \right\} \\ &= (\text{in laatste integraal } x = a + b \tan \theta) \\ &= \lim_{b \downarrow 0} \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)u'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 u''(a) + \dots}{(x-a)^2 + b^2} + \\ &\quad + \lim_{b \downarrow 0} \frac{b}{\pi} u(a) \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{b/\cos^2 \theta}{b^2/\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

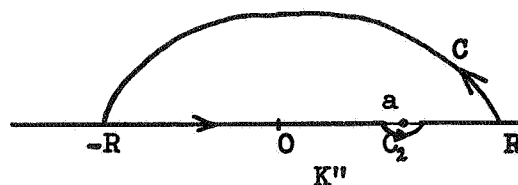
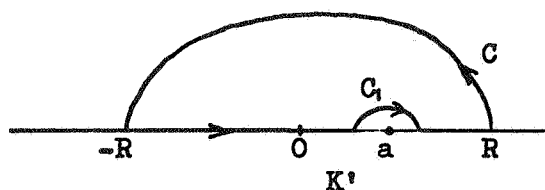
$$= \lim_{b \downarrow 0} \frac{b}{\pi} u'(a) \log \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + 0 + u(a) = u(a).$$

Substitutie van $b = 0$ in (14.15) en (14.16) geeft de divergente integralen

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x-a} dx \text{ en } -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-a} dx.$$

Uitgangspunt was de integraal $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(z)}{z-a-bi} dz$.

Als $b = 0$, komt $a+bi = a$ op de integraalcontour te liggen. We nemen daarom een nieuwe contour K' die uit K ontstaat door het lijnstuk $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ te vervangen door een halve cirkelboog C_1 om a met straal ϵ , gelegen in het bovenhalfvlak. K'' analoog met de halve cirkelboog C_2 in het onderhalfvlak.



De limiet voor R naar oneindig van de integraal over C is weer nul. Dus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K'} \frac{w(z)}{z-a} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} \frac{w(z)}{z-a} dz + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{w(z)}{z-a} dz + \int_{C_1} \frac{w(z)}{z-a} dz \right\} = 0 \quad (*)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K''} \frac{w(z)}{z-a} dz = w(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} \frac{w(z)}{z-a} dz + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{w(z)}{z-a} dz + \int_{C_2} \frac{w(z)}{z-a} dz \right\} = w(a) \quad (**)$$

$$\int_{C_1} \frac{w(z)}{z-a} dz = \int_{\pi}^0 \frac{w(a + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta$$

$$= -i \int_0^\pi w(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

(*) geeft

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} \frac{w(z)}{z-a} dz + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{w(z)}{z-a} dz - i \int_0^\pi w(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \right\} = 0$$

of (zie blz.88)

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{x-a} dx - i \pi w(a) \right\} = 0$$

dus

$$w(a) = \frac{1}{\pi i} \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{x-a} dx.$$

Daaruit volgt

$$u(a) = \frac{1}{\pi} \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x-a} dx \quad (14.19)$$

$$v(a) = -\frac{1}{\pi} \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-a} dx. \quad (14.20)$$

Een analoge beschouwing van (**) levert geen nieuws.

We willen nu een verband van (14.19, 20) met (14.9, 10) aanbrengen door middel van een lineaire transformatie $w(z)$ die het halfvlak $\text{Im}(z) \geq 0$ afbeeldt op het cirkelvlak $|z| \leq R$. Hierbij moet de rand $\text{Im}(z) = 0$ met behoud van orientatie overgaan in de rand $|z| = R$. We dienen dus van drie punten de beelden voor te schrijven (zie 13.19) zodanig dat (14.19) overgaat in (14.9).